Tutorium Theorie I, 1.12.2009

Note Title 11/3/2009

1) Typ einer Grammatik aus Produktionen ablesen
   kontextfrei vs kontextsensitiv

2) 5.5.1, 5.5.3

3) Grammatik & Sprache beweisen

4) AP-NEA

Typ einer Grammatik ist definiert durch Vorschriften an Regeln

5.5.1 $$((\underbrace{R+S}_{E})(\underbrace{R+S}_{E})^*)^* \hat{=} (\underbrace{R+S}_{E})^+ + \varepsilon$$

$$(E\,E^*)^* \hat{=} E^+ + \varepsilon$$

zu zeigen: $(E^+)^* \hat{=} E^+ + \varepsilon \cong E^*$ (Folie 11)

Alternativ
$w \in L((E^+)^*)$
$\Leftrightarrow$
$w \in L(E^*)$

zeige $L((E^+)^*) = L(E^*)$

Es ist $\{w \mid w = \underbrace{w_{11} .. w_{1i_1}}_{\in L(E^+)} \underbrace{w_{21} .. w_{2i_2}}_{L(E^+)} .. \underbrace{w_{n1} .. w_{ni_n}}$ mit $w_{ij} \in L(E)\}$
und $i_1 .. i_n \geq 1$
$n \geq 0$

$\subseteq \{w \mid w = w_1 .. w_n \quad w_i \in L(E)\}$ also

also $L((E^+)^*) \subseteq L(E^*)$

Umgekehrt: $\{w \mid w = w_1 .. w_n$ mit $w_i \in L(E)\} = L(E^*)$
$\subseteq \{w \mid w_1 = w_1 .. w_n$ mit $w_i \in L(E^+)\} = L((E^+)^*)$

also $L(E^*) \subseteq L((E^+)^*)$

damit sind die Sprache gleich und $(E^+)^* \cong E^*$

damit für $E = R+S$ folgt $((R+S)(R+S)^*)^* = (R+S)^+ + \varepsilon$

Alternative Form

$L((E^+)^*) = L(E^*)$

zeige $\forall w \in L((E^+)^*) .\ w \in L(E^*)$

und $\forall v \in L(E^*) ,\ v \in L((E^+)^*)$

also $\forall w \in \Sigma^* .\quad w \in L((E^+)^*) \iff w \in L(E^*)$

Sei $w \in L((E^+)^*)$

dann $\exists n .\quad w = w_1 \ldots w_n$ und $w_i \in L(E^+)$ für alle $i \leq n$

dann $\exists n, l_1 \ldots l_n$

$w = \underbrace{w_{11} \ldots w_{1 i_1}}\ \text{———}\ w_{n1} \ldots w_{n i_n}$ mit $w_{ij} \in L(E)$

... analog

$\overline{5.5.3 : \quad (RS + R)^* R = R(SR + R)^*}$ ähnliche Methodik

Sei $w \in L((RS + R)^* R)$ ~~dann~~

dann gibt es $v_i \in L(RS+R)$, $u \in L(R)$, so daß $w = v_1 \ldots v_n u$

dann $w = v_1 \ldots v_n u$ mit $v_i = r_i s_i$ mit $r_i \in L(R)$, $s_i \in L(S+\varepsilon)$

also $w = \underbrace{v_1 s_1 r_2}\, \underbrace{s_2} \ldots \underbrace{r_n}\, \underbrace{s_n u}$ mit $r_i \in L(R)$ $u \in L(R)$ $s_i \in L(S+\varepsilon)$

also $w = r_1 \; x_1 \; x_2 \; x_n$ mit $r_1 \in L(R)$, $x_i \in L(SR+R)$

also $w \in L(R(SR+R)^*)$

Umkehrung gilt analog, also $L((RS+R)^*R) = L(R(SR+R)^*)$

AP-NEA ist ein Kunstgebilde, ε-NEA mit neuer Vorschrift

$L(A) = \{ w \mid \underbrace{\emptyset \neq \hat{\delta}(q_0, w) \subseteq F}_{S} \}$ für AP-NEA

vergleiche

NEA: $L(A) = \{ w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \}$

DEA: $L(A) = \{ w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F \}$

zeige 1) für einen AP-NEA A ist $L(A)$ regulär
2) und für jede reguläre Sprache L gibt es einen AP-NEA A mit $L(A) = L$

1) Anpassung der Teilmengenkonstruktion (Folie aus § 2.1 umschreiben)

einzige Änderung ist Menge der 'generierten' Endzustände

Sei $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A)$ ein AP NEA

Konstruiere DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ mit

$Q_D = \mathcal{P}(Q_A)$ ← alte Konstruktion

$\delta_D(S, a) = \{ p \mid \exists q \in S.\ p \in \hat{\delta}_A(q, a) \}$

$q_D = \varepsilon$- Hülle von q_A

$F_D = \{ S \in Q_D \mid \emptyset \neq S \subseteq F_A \}$

bei NEA $F_D = \{ S \mid S \cap F \neq \emptyset \}$

aus Einheit 2.1 (Folie 17/18 ?)

$$\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}_A(q_A, w)$$ ✓

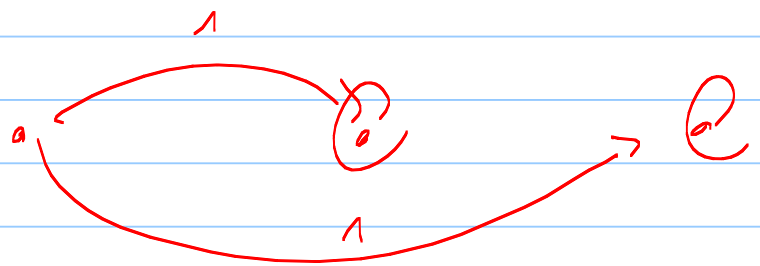
also $L(A_D) \overset{Def}{=} \{ w \mid \hat{\delta}(q_D, w) \in F_D \}$ einsetzen.

$$= \{ w \mid \emptyset \neq \hat{\delta}_A(q_A, w) \subseteq F_A \}$$

$$\overset{Def}{=} L(A)$$ ✓

2) Jeder DEA ist ein spezieller AP-NEA mit nur einer Auswahlmöglichkeit

$$A_D \to A_{AP} : \quad \delta_A(q, a) = \{ \delta_D(q, a) \}$$



Aufgabe 6.1.3

$G = (V, T, P, S)$

$P = \{ S \to \varepsilon,\ S \to aS,\ S \to Sb,\ S \to T,\ T \to dU,\ T \to Ue,\ T \to fU$
$U \to \varepsilon,\ V \to dT \}$

Terminal

Umwandeln in rechtslineare Grammatik
links ein Hilfssymbol, rechts ε oder aA

Hilfssymbol

Was stört: $S \to Sb$, $S \to T$, $T \to Ue$

es gibt kein Schema:

"$S \to T$" ersetzen durch "Nachfolge von T" $S \to dU$, $S \to Ue$

"$S \to Ue$, $T \to Ue$": U steht links nur bei $U \to \varepsilon$
darf Reihenfolge drehen ohne daß sich etwas ändert:
$S \to eU$, $T \to eU$

"$S \to Sb$": erzeugt b's am Ende eines Wortes und nur dort. Alle andere Regeln gerade. links kann trennen
$S \to bU$, $U \to b, U$ weil U bisher nur ε

$S \to Sb \to Tb \to Veb \to eb$

$\searrow bW$ ↯

$\searrow eU \to ebU \ldots$

erzeugt und V in Endzuständen über T zu U wird

einziges Ende ist via U

Insgesamt: $\{S \to \varepsilon,\ S \to aS,\ S \to dV,\ S \to cU,\ S \to fU,\ S \to bU,$
$V \to dT,\ T \to dV,\ T \to eU,\ T \to fU,$
$U \to bU,\ U \to \varepsilon\}$

$G = (\{S, T, U\}, \{0,1\}, S, P)$ mit $P = \{S \to 1T, T \to 0U1, U \to 1T0, U \to \varepsilon\}$

zeige $L(G) = \{1\,(01)^{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Idee: Worte werden wie folgt abgeleitet:

$S \to 1T \to 10U1 \to 101$

$\searrow 101T01 \to 10100U101 \to \varepsilon$

Schleife

Die ersten beiden Schritte sind zwingend, der letzte auch

Der Kernbeweis ist also ein Induktionsbeweis über die Schleife

- **Zu zeigen:** $\forall w \in \{0,1\}^*.\ w \in L(G) \iff S \xrightarrow{*} w \iff \exists n.\ w = 1(01)^{2n+1}$

Da die erste Regel einer Ableitung immer $S \to 1T$ sein muß, (einzige Regel mit S)
die zweite immer $T \to 0U1$ (einzige Regel mit T links)
und die letzte immer $U \to \varepsilon$ (einzige Regel mit ε rechts)
genügt es, einen Beweis über das Verhalten zwischen der zweiten und letzten Regel zu führen und anschließend die drei Rahmenschritte zu ergänzen

- **Behauptung:** Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $v, w \in \{0,1\}^*$ gilt
$$U \xrightarrow{2n} v\,U\,w \iff v = w = (10)^n$$

Beweis durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

- Basisfall $n = 0$:
Für alle v, w gilt: $U \xrightarrow{2\cdot 0} vUw \iff U = vUw$
$\iff v = w = \varepsilon = (10)^0$

- Induktionsannahme: Es sei: für ein $n \in \mathbb{N}$ und beliebige v, w gezeigt
$U \xrightarrow{2n} vUw \iff v = w = (10)^n$
- Induktionsschritt: Wir zeigen $U \xrightarrow{2(n+1)} vUw \iff v = w = (10)^{n+1}$

der Klarheit halber zeige ich beide Richtungen separat

'=>' Es gelte $U \to^{2n+2} vUw$, also $U \to x \to y \xrightarrow{2n} vUw$

da $x \neq \varepsilon$ sein muß ist $x = 1T0$ (einzige U-Regel)

und $y = 10\,U\,10$ (einzige T-Regel)

da die Grammatik linear ist folgt aus $10\,U\,10 \xrightarrow{2n} vUw$

$v = 10v'$, $w = w'10$ und $U \xrightarrow{2n} v'Uw'$

per Induktionsannahme folgt $v' = w' = (10)^n$

also $v = w = (10)^{n+1}$

'<=' Sei $v = w = (10)^{n+1}$

Dann gibt es v', w' mit $v = 10v'$, $w = w'10$ und $v' = w' = (10)^n$

per Induktionsannahme folgt $U \xrightarrow{2n} v'Uw'$

also

$$U \to 1T0 \to 10\,U\,10 \xrightarrow{2n} 10v'\,U\,w'10 = vUw$$

also $U \xrightarrow{2n+2} vUw$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen

Außerdem gilt: $U \xrightarrow{*} vUw$

$\iff (\exists n)\ U \xrightarrow{2n} vUw$

(das könnte man in den Induktionsbeweis integrieren aber es bringt nichts)

Es folgt für alle $\bar{w} \in \{0,1\}^*$

$(\Rightarrow)$ $S \xrightarrow{*} \bar{w} \Rightarrow S \to 1T \to 10U1$
$\xrightarrow{*} 10vUw1 \to 10vw1 = \bar{w}$

$\Rightarrow (\exists n)$
$S \xrightarrow{2} 10U1 \xrightarrow{2n} 10vUw1 \to \ldots\ldots$

(Ind. Beweis) $\Rightarrow (\exists n)$ $S \xrightarrow{2} 10U1$, $10vUw1 \to 10vw1 = \bar{w}$

und $v = w = (10)^n$

$\Rightarrow \bar{w} = (10)^{2n+1}1 = 1(01)^{2n+1}$

$(\Leftarrow)$ $\bar{w} = (10)^{2n+1}1 \Rightarrow S \xrightarrow{2} 10U1 \xrightarrow{2n} 10(10)^nU(10)^n1$
$\to 10(10)^n(10)^n1 = \bar{w}$

also $S \xrightarrow{*} \bar{w}$

Insgesamt folgt also $\bar{w} \in L(G) \Leftrightarrow S \to \bar{w} \Leftrightarrow w = 1(01)^{2n+1}$.

Sehr detailliert und aufwendiger als nötig.