Tutorium Theorie I, 8.12.2009

Note Title 11/3/2009

Wann sind zwei regulaere Ausdruecke gleich ?
Aufgabe 7.2: ein Beispiel rechnen
Beweise von Abschlusseigenschaften (z.B. Spiegelung)

- Wann sind zwei Ausdrücke gleich
  - intensional ("von innen") wenn Text gleich
  - extensional ("von außen") wenn Bedeutung gleich
    'Äquivalenz'

- Zeigen Sie, daß reguläre Sprachen abgeschlossen sind unter 'min' mit $\min(L) = \{ w \in L \mid \text{kein echtes Präfix von } w \text{ ist in } L \}$

abgeschlossen unter op heißt

wenn L_1, L_2 zur Klasse gehören, dann auch $L_1 \text{ op } L_2$

hier wenn $L \in \mathcal{L}_3$ dann $\min(L) \in \mathcal{L}_3$

Überlegung: wenn $w \in L$ in $\min(L)$ liegt
dann darf kein echter Präfix von w in L liegen

oder
$\longrightarrow$ keine echte Fortsetzung von w liegt in $\min(L)$

$\min(L)$ = die "kleinsten" Worte aus L

Wie bauen wir einen Automaten für $\min(L)$

Sei A ein DEA für L, dann gilt
$w \in \min(L) \iff A$ akzeptiert w
und keine Fortsetzung von w, die A akzeptiert
darf akzeptiert werden

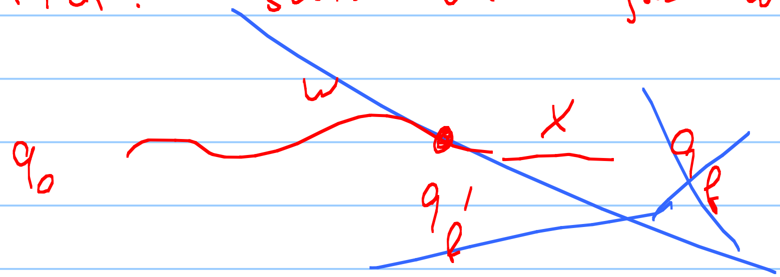
Idee: Konstruiere A' für $\min(L)$
indem jeder Übergang, der in eine $q \in F$ beginnt, entfernt wird [oder umgelenkt zu Fehlerzustand]

d.h. wenn $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$
und $x \neq \varepsilon \in \Sigma^*$
dann $\hat{\delta}(q_0, wx) \in \emptyset$ also nicht "in F"

Automat wird nichtdeterministisch
[oder hat Fehlerzustand]

max(L) ähnlich: suchen die längsten Wörter in L

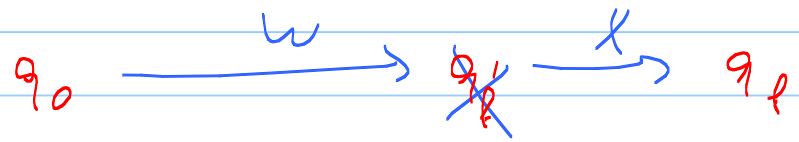
Skizze



$w \in \max(L) \iff \hat{\delta}(q_0, w) \in F$
und kein echter Präfix von w liegt in max(L)

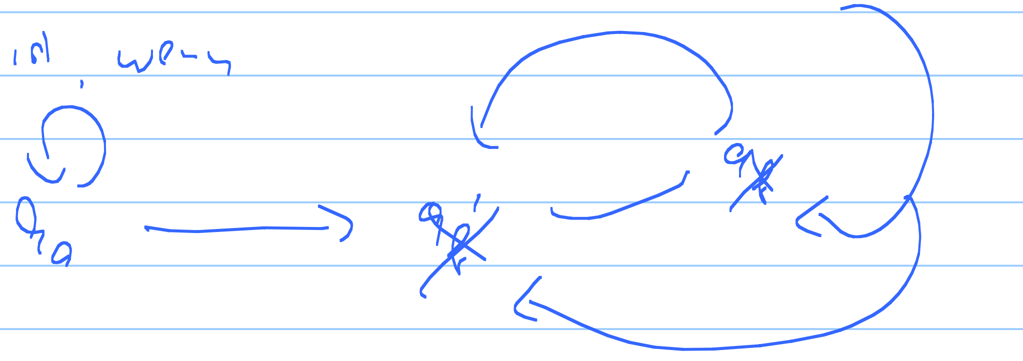
Skizze zur Konstruktion muß umgesetzt werden

Streiche Endzustände auf Weg zu anderen Zuständen aus F



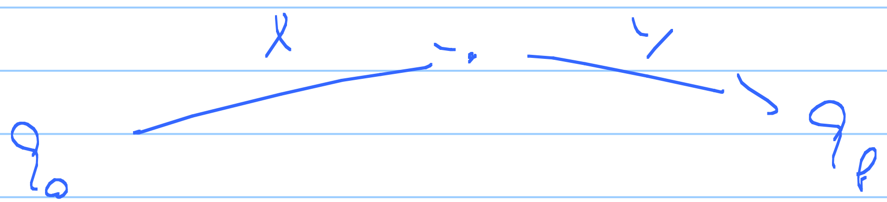
kein Endzustand mehr

was ist, wenn



pathologisch $\qquad q_0 \in F$

!! HA 7.7:



$\mathrm{cycle}(L) = \{ yx \mid xy \in L \quad x, y \in \Sigma^* \}$

Beweise von Abschlußeigenschaften z.B. Spiegelung

zeige $\mathcal{L}_3$ abgeschlossen unter Spiegelung

d.h. $\forall L \in \mathcal{L}_3, \quad L^R \in \mathcal{L}_3$ $\quad (\ op(L) \in \mathcal{L}_3\ )$

Vorgehensweise: Sei L regulär

dann 1) gibt es einen DEA A mit $L(A) = L$ $\quad \leftarrow (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

2) eine Grammatik G mit $L(G) = L$

3) einen reg. Ausdruck σ mit $L(\sigma) = L$

Wir konstruieren einen Automaten A' mit $L(A') = L^R$

Idee: A' beschreibt Rückwärtslauf der Übergänge in A
neuer Startzustand nötig um alle alten Endzustände zu erreichen
Startzustand von A wird Endzustand von A'

Setzen $A' = (\ Q \cup \{q_0'\},\ \Sigma,\ \delta',\ q_0',\ \{q_0\})$

mit $\delta'(q,a) = \{ p \mid \delta(p,a) = q \}$

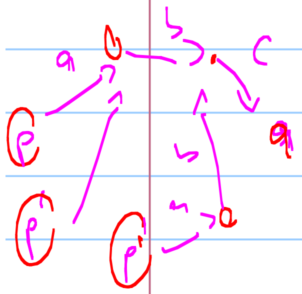
A' ist ein NEA $\qquad \delta'(q_0', \varepsilon) = F$

zeige $L(A') = L^R = \{ w^R \mid w \in L \}$

$= \{ w_n \dots w_1 \mid w_1 \dots w_n \in L \}$

beweist mit Induktion über Struktur von w

$\hat\delta'(q, w) = \{ p \mid \hat\delta(p, w^R) = q \}$ für $q \in Q$



- **Start** $w = \varepsilon$ $\qquad \hat\delta'(q,w) = \{q\} = \hat\delta(q,w) \qquad \varepsilon^R = \varepsilon$

- **Schritt** (Skizze)

$$\hat\delta'(q, wa) \overset{\text{Def}}{=} \{ p \mid \exists p' \in \hat\delta'(q,w).\ p \in \delta'(p', a) \}$$

def δ'

Ind. Ann. $= \{ p \mid \exists p' \in \{ q' \mid \hat\delta(q', w^R) = q \}.\ \delta(p,a) = p' \}$

$= \{ p \mid \delta(p,a) = p' \wedge \hat\delta(p', w^R) = q \}$

def $\hat\delta$ (Lemma) $= \{ p \mid \hat\delta(p, aw^R) = q \}$

Def "w^R" $= \{ p \mid \hat\delta(p,(wa)^R) = q \}$

$\hat\delta(q_0', w) = \{ p \mid (\exists q \in F)\ \hat\delta'(q, w) \ni p \}$

erste $= \{ p \mid (\exists q \in F).\ \hat\delta(p, w^R) = q \}$

schritt $=$

$w \in L(A') \Leftrightarrow \hat\delta(q_0', w) \cap F' \neq \emptyset \Leftrightarrow \hat\delta'(q_0', w) = \{q_0\}$

$\Leftrightarrow \{q_0\} = \{ p \mid (\exists q \in F)\ \hat\delta(p, w^R) = q \}$

$\Leftrightarrow \hat\delta(q_0, w^R) \in F$

$\Leftrightarrow w^R \in L(A)$

Äquivalenzklasse von Wörtern in Sprachen:

bei Automaten: $p \equiv q \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^*.\ \hat\delta(p,w) \in F \Leftrightarrow \hat\delta(q,w) \in F$

übertrage auf Sprache: $v \sim_L u \Leftrightarrow \forall w \in \Sigma^*.\ vw \in L \Leftrightarrow uw \in L$

Losgelöst von Automaten

$\hat\delta(q_0 v) = p$ $\quad$ $\hat\delta(q_0, v) = q$

Äquivalenzklasse: Menge von äquivalenten Elementen

hier = Menge von Wörtern aus Σ^* die äquivalent sind

$$[v]_L = \{ u \in \Sigma^* \mid u \sim_L v \}$$

Exkurs: bei Zahlen $x \sim_{23} y \Leftrightarrow x - y \mod 23 = 0$

$$[4]_{23} = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \sim_{23} 4 \}$$

$$= \{ 4, 27, 50, 73, \dots \}$$

$$[4]_{23} = [27]_{23} = [50]_{23}$$

Alle Äquivalenzklassen zusammen bilden Σ^*

$$\Sigma^* = \{ w \mid w \in \Sigma^* \}$$

$$= \{ w \mid w \in [w]_L \}$$

Frage wieviele Klassen sind verschieden?

$L = \{0^n 1^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

$[\varepsilon]_L = \{u \in \{0,1\}^* \mid \forall w \in \Sigma^* .\ \cancel{\varepsilon} w \in L \iff u \circ w \in L\}$

alle Wörter die sich mit einem $w \in \{0^n 1^m\}$ fortsetzen lassen zu einem Wort aus L

$\cancel{[0]_L}$

$[1]_L$

$\cancel{[00]_L}$

$[10]_L$

$[01]_L$

$[11]_L$

$[\varepsilon]_L = \{\varepsilon, 0, 00, 000, \ldots\} = \{0\}^* = [0]_L$

$[1]_L = \{u \mid \forall w .\ \underbrace{1 w \in L}_{w \in \{1\}^*} \iff u w \in L\}$

$= \{u \mid u = 0^n 1^{m+1}\} = [1]_L, [01]_L = [011]_L$

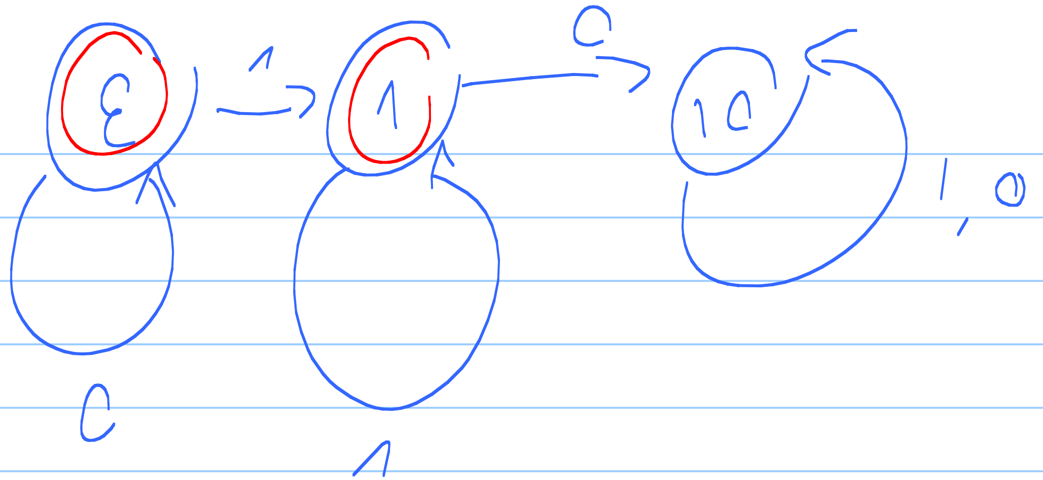
$[10]_L = \{u \mid \forall w\ \underline{10 w \in L} \iff u w \in L\}$

falsch

$= \{w \mid \forall w .\ u w \notin L\}$

$= \{u \mid u$ enthält $'10'\}$

$[\varepsilon]_L \cup [1]_L \cup [10]_L = \Sigma^*$



$\{0^n 1^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ erzeugt beliebig viele Klassen

$[\varepsilon]$ $[0]$ $[00]$ $[000]$ . .