Tutorium Theorie I, 15.12.2009

Note Title 11/3/2009

- Pumping Lemma: 8.2 - 8.4
- Aufgabe 7.5 · alternierend
  7.7 · cycle
  } was ist die Methode?
- Beispiele für Äquivalenzklassen
- Äquivalenzklasse systematisch finden (Table-Filling)

Pumping Lemma:

8.2.3: $L_3 = \{ vv \mid v \in \{0,1\}^* \}$ nicht regulär

Suche Wort w lang genug, so daß aufpumpen auf keinen Fall in L_3 bleibt

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wählen $w := 0^n 1^n 0^n 1^n$ $(n > 0)$

Idee $w = 0 \ldots 0\, 1 \ldots 1$ $\quad ww = 0^n 1^m 0^n 1^m$

Pumpen hier erzwingen

Ergebniss wäre $\quad 0^y 1^m 0^n 1^m \quad y \neq n$

dann $|w| = 4n \geq n$

Sei xyz Zerlegung von w mit $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$

Also $x = 0^j \quad y = 0^i \quad z = 0^{n-j-i} 1^m 0^n 1^m \quad i > 0$

wähle $k = 0$. Dann ist $xy^kz = xz$

$= 0^j 0^{n-j-i} 1^n 0^n 1^n$

$= 0^{n-i} 1^n 0^n 1^n$

$\notin L_3$ weil $i \neq 0$

wäre $w = vv$ dann $v = 0^{n-i} 1^n 0^{\frac{i}{2}}$

$\neq 0^{n-\frac{i}{2}} 1^n$

Kontraposition von $A \Rightarrow B$ ist $\neg B \Rightarrow \neg A$

Kontradiktion ist Annahme $\neg B$ und A dann zeige Widerspruch also muß B gelten

Annahme A, zeige $\neg B$ wegen $A \Rightarrow B$ ist das ein Widerspruch, also gilt B

7.5 $u = a_1 \dots a_n$ $v = b_1 \dots b_n$ dann

$alt(u,v) = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n$

$$alt(L_1, L_2) = \{ alt(u,v) \mid u \in L_1, v \in L_2, |u| = |v| \}$$

L_1, L_2 regulär $\Rightarrow$ $alt(L_1, L_2)$ regulär

① Produktautomat: neu verschalte "Durchschnitt"

wechselweise ein Symbol wie für L_1

ein " L_2 abarbeiten

Technisch aufwendig

$(q_1, q_2), a \to (\delta_1(q_1, a)', q_2), b$

$\to (\quad " \quad , \delta_2(q_2, b))$

(2) $\boxed{\mathrm{alt}(L_1, L_2) = L_1' \cap L_2'}$ darstellen

$L_1' =$ aufblähen von L_1 : $\{ \mathrm{alt}(u, w) \mid u \in L_1, w \in \Sigma^*, |u| = |w| \}$

$L_2 =$ aufblähen von L_2 $\{ \mathrm{alt}(w, v) \mid v \in L_2, w \in \Sigma^*, |v| = |w| \}$

Automat für L_1' = Verzögerte Abarbeitung für L_1 ähnliche Idee

Sei $L_1 = L(A_1)$ $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$

$A_1' = (Q \cup Q', \Sigma, \delta_1', q_{01}, F)$

$Q' = \{ q' \mid q \in Q \}$

$\underline{\delta_1'(q, a)} = \underline{\delta_1(q, a)'}$ Vormerken, noch ein Schritt

$\delta_1'(p', a) = p$ $p' \in Q'$ $p \in Q$ für alle a

q_1, q_2

$\downarrow$

$\delta_1(q_1, a)', q_2$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\delta_2(q_2, b)'$

zeige: $\forall w \in \Sigma^*.\ \hat{\delta}'(q,w) \in Q \iff$

(Induktion) $\exists u, v \in \Sigma^*.\ |u| = |v| \land w = alt(u,v)$

"wohlgeformt")

- $\hat{\delta}(q, u) = p \iff \exists v \in \Sigma\ |u| = |v|$
  $\land\ \hat{\delta}'(q, alt(u,v)) = p$

Automaten verhalten sich 'gleich'

also $w \in L(A_1') \iff \hat{\delta}'(q_0, w) = p \in F$

$\iff \hat{\delta}(q_0, u) = p \in F$ für ein $v \in \Sigma^*$
mit $w = alt(u,v)$, $|u| = |v|$

$\iff u \in L_1 \land w = alt(u,v)$ für ein $v \in \Sigma^*$ mit $|u| = |v|$

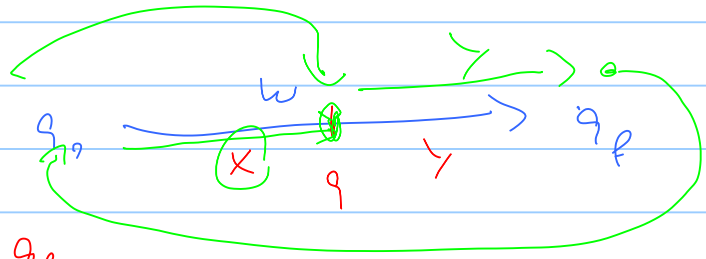
$\iff w \in L_1'$ $\therefore$

L_2' analog und $alt(L_1, L_2) = L_1' \cap L_2'$

Cycle: $cycle(L) = \{ xy \mid yx \in L \}$ x, y beliebig zu wählen

Skizze:

$w \in L \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \in F$

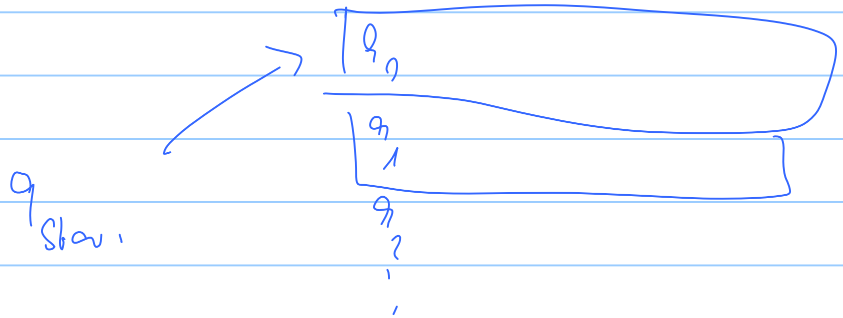


$w = xy \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, x) = q, \ \hat{\delta}(q, y) = q_f$

$yx \in cycle(L)$: jeder Einstiegspunkt muß möglich sein (q)
und ich muß in q enden

jedes q auf Weg muß verwendet werden:

ich muß q mitführen !? "wo bin ich eingestiegen"



$|Q|$ kopien

geht auch einfacher zu beschreiben als Produkt

$$
\begin{tikzcd}
q_s \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[r, bend left, "a"] & (q, q) \arrow[r, "y"] & (q, q_f) \arrow[r, "\varepsilon"] & (q, q_0) \arrow[r, "x"] & \boxed{(q, q)}
\end{tikzcd}
$$

fest

sagt wie zuvor

$Q' = Q \times Q \cup \{q_s\}$

$q_0' = q_s$

$F' = \{(q,q) \mid q \in Q\}$

1) wenn $q_0 \in F$ war dann $\delta'(q_s, \varepsilon) = F'$

$\delta'((q,p),a) = (q, \delta(p,a))$

$\delta'((q,p),\varepsilon) = (q, q_0)$ für $p \in F$

2) wenn $q_0 \notin F$ dann $\delta'(q_s, a) = \{(q, \delta(q,a)) \mid q \in Q\}$

$\hat{\delta}'((q,p), xy) = (q, \hat{\delta}(q_0, y))$ falls $\hat{\delta}(p,x) \in F$

$= (q, \hat{\delta}(p, xy))$ sonst

~ unsauber ~

Balancieren

$w = xy \rightarrow y^{?} x^{?} \rightarrow \varepsilon^{u} y^{?} x^{?}$

$\rightarrow$

Äquivalenzklasse.

8.2.2 $L_2 = \{ 0^{i^2} \mid i \in \mathbb{N} \}$ gesucht Σ^* / L_2

Klasse sind $[u]_{L_2} = \{ v \mid \forall w.\ uw = 0^{i^2} \Leftrightarrow vw = 0^{j^2} \}$

$\varepsilon\, 0^4$ $\quad 0\, 0^4$

$= \{ v \mid |v| - |w| = j^2 - i^2$ für alle $i, j \}$

$|v| = |vw| - \cancel{|w|}$

$|u| = |uw| - \cancel{|w|}$

Längendifferenz der Worte einer Klasse ist differenz zweier beliebiger Quadratzahlen — hieße jedes hat eigene Klasse

$[\varepsilon] = \{ w \mid |u| = j^2 - i^2,\ i, j \in \mathbb{N} \}$

$= \{ \varepsilon, 0, 000, 0000, 00000, 0^8, 0^9 \dots \}$

$j=0$ $j=1$ $j=2$ $j=3$

~~$[a] = [\varepsilon]$~~ ✓

$[\varepsilon] = \{ v \mid vw \in L \iff w \in L \}$

alle Worte für die $|v| + i^2 = j^2$ für alle i | und ein j)

wenn $|v| \neq 0$ dann $j > i$

$j = i + k \to j^2 = i^2 + \underbrace{\boxed{2ik + k^2}}_{|v|} \to k^2$ wächst

geht nur für $k = 0$, $|v| = 0$

$[\varepsilon] = \{\varepsilon\}$

$[a] = \{ v \mid vw \in L \iff aw \in L \}$

alle Worte für die $|v| + i^2 - 1 = j^2$ ...

analoges Argument

$[a^l] = \{ a^l \}$ jedes Wort hat eigene Klasse

$5 \longleftrightarrow 17$

9 21

$\rightarrow$ nicht regulär wegen Myhill-Nerode

Ist x a^3 $\quad 1 \; 4 \; \overset{n^3}{9} \; \overset{n^4}{16} \ldots$

$\underbrace{\qquad}_{2n+1}$

Table filling: $q \equiv p \iff$ für alle $w \in \Sigma^*$

$\hat{\delta}(q, w) \in F \iff \hat{\delta}(p, w) \in F$

$u \sim_L v \qquad uw \in L \iff vw \in L$

Wie finden wir äquivalente Zustände:

- schwer: alle $w \in \Sigma^*$ durchprobieren?
  bis maximale Länge $+ \alpha$ l

- besser nicht äquivalente finden

$q \not\equiv p \iff$ es gibt ein $w \in \Sigma^*$. $\hat{\delta}(q, w) \in F$

und $\hat{\delta}(p,w) \notin F$

oder umgekehrt

Table filling: finde alles was nicht äquivalent ist

Rest ist äquivalent

Schrittweise in Tabelle

beginne mit $|w| = 0$ * $\rightarrow$ Q_0 von Zustandsmenge

$|w| = 1$ $\rightarrow$ Q_1

wenn Q_n bekannt

finde Q_{n+1} für $|w| = n+1$ *

Stop wenn $Q_n = Q_{n+1}$

* $|w| = 0$ $\hat{\delta}(p,\varepsilon) = p \in F$ und $\hat{\delta}(q,\varepsilon) = q \notin F$

oder umgekehrt

alle $q \in F$ sind nicht äquivalent zu $p \notin F$

* Phase $n+1$: Tabelle ist teilgefüllt $|w| = n+1$

$w = a\,v \quad |v| = n$

$q \not\equiv p \iff \hat{\delta}(q,w) \in F \land \hat{\delta}(p,w) \notin F$

$\Leftarrow \delta(q, a) \not\sim \delta(p, a)$

Teste für noch offenen Zustände p, q

ob $\hat{\delta}(p, a) \not\sim \delta(q, a)$ in Tabelle