Tutorium Theorie I, ~~3.11.2009~~ 2.2.2010

Note Title 11/3/2009

Beispiel aus 13.4 (Pumping Lemma)

13.4.4 : $D = \{ a^p \mid p \text{ Quadratzahl} \}$

13.7 L kontextfrei, $L \subseteq \{a\}^*$ (Einelementiges Alphabet)
$\rightarrow$ L regulär

D nicht regulär (Pumping Lemma für Typ 3)
$\rightarrow$ D nicht kontextfrei

$C = \{ a^n b^{n!} \mid n \in \mathbb{N} \}$ nicht kontextfrei

Pumping Lemma umgedreht:

C ist nicht kontextfrei, wenn
für jede Zahl n gibt es ein Wort $z \in C$ mit $|z| \geq n$
so daß für jede Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n$
$|vx| \geq 0$

eine Zahl k existiert mit $uv^kwx^ky \notin C$

Beweis für $C \notin \mathcal{L}_2$ folgt groben Schema

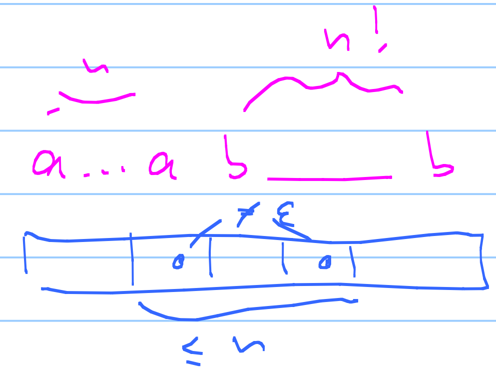
Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig

wähle $z = a^n b^{n!}$, dann $|z| \geq n$

Sei $z = uvwxy$ eine beliebige Zerlegung mit

$|vwx| \leq n$ und $|vx| \geq 0$

wir analysieren die Möglichkeiten:



I: • v besteht nur aus a's ; $v = a^j$
x nur aus b's $x = b^i$

$j \neq 0$ oder $i \neq 0$ (oder beides)
↳

a) wenn $j > 0$ dann $i < n$

wähle $k = 2$; dann $uv^2wx^2y = a^{n+j} b^{n!+i}$

wegen $j \geq 1$:

$$(n+j)! \geq (n+1)! = (n+1)\, n!$$
$$= n! + n \cdot n!$$
$$> n! + i$$

also $uv^2wx^2y \notin C$

b) wenn $j = 0$ dann ist $uv^2wx^2y = a^n b^{n!+i} \neq a^n b^{n!}$
$\notin C$

II: entweder v oder x bestehen aus $a^j b^i$

dann hat uv^2wx^2y die Form $a^n b^i a^j b^{n!+?} \notin C$

"dann kommt in uv^2wx^2y mindestens ein a nach einem b"

also ist bei jeder Zerlegung das Wort $\underline{uv^2wx^2y} \notin C$

Insgesamt ist dann C nicht kontextfrei

z.B. $v = a^j b^i$ dann $x = b^\ell$

$u v^2 w x^2 y = a^n b^i a^j b^{n!+l}$

$u = a^{n-j}$

$v = a^j b^i$

$w = b^m$

$x = b^l$

$y = b^{n!-l-m-i}$

$u v^2 w x^2 y$

$a^{n-\cancel{j}} \, a^{\cancel{j}} \, b^i \, a^j \, b^{\cancel{i}} \, b^{\cancel{m}} \, b^l \, b^{\cancel{l}} \, b^{n!-\cancel{l}-\cancel{m}-\cancel{i}}$

$$a^{n^2} = \underbrace{u \overbrace{v w x}^{\neq \varepsilon} y}_{|\,vwx\,| \leq n} \quad \text{und} \quad u, v, w, x, y \in \{a\}^*$$

$n^2 + i$ ist keine Quadratzahl wenn $i > 0$, $i \leq n$

weil $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 > n^2 + n$

12.5

$L_1 = \{ a^n b^{2n} c^m \mid m, n \in \mathbb{N} \}$

$L_2 = \{ a^n b^m c^{2m} \mid \ldots \}$

$L_3 = \{ a^i b^j c^k \mid j = 2i \text{ oder } k = 2j \}$ ← mehrdeutig

$L_4 := L_1 \cap L_2$

wir benutze $L_{01} = \{ 0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N} \} \in \mathcal{L}_2$

$L_{012} = \{ 0^n 1^n 2^n \mid n \in \mathbb{N} \} \notin \mathcal{L}_2$

$\overline{L_1} \rightarrow h(L_1) = \{ 0^n 1^n 2^n \}$ $\cancel{\emptyset}$

$\rightarrow h(L_1) \cap L(0^* 1^*) \rightarrow L_{01}$

gilt Schluß daß $L_1 \in \mathcal{L}_2$?

$$L_1 = \{ a^n b^{2n} \mid .. \} \circ \{ c^m \mid ... \}$$

$$h(L_{01}) \circ \cancel{h'(L_{01})} \circ L(c^*)$$

mit $h(0) = a$ $\cancel{h'(0) = c}$

$h(1) = bb$ $\cancel{h'(1) = \varepsilon}$

Verkettung + Homomorphismus auf bekannte kontextfreie Sprache gibt kontextfreie Sprache, also $L_1 \in \mathcal{L}_2$

$L_2 \in \mathcal{L}_2$ analog

$$L_3 = \{ a^i b^j c^k \mid j = 2i \} \cup \{ a^i b^j c^k \mid k = 2j \}$$

$$= \{ a^i b^{2i} c^k \mid ... \} \cup \{ a^i b^j c^{2j} \mid ... \}$$

$$= L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_2$$

$$L_4 = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^{2n} c^m \mid .. \} \cap \{a^n b^m c^{2m} \mid \dots\}$$

$$= \{a^n b^{2n} c^{4n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

→ wir wissen $L_{012} = \{0^n 1^n 2^n \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{L}_2$

→ setze $h(0) = a \quad h(1) = bb \quad h(2) = cccc$

~~dann ist~~ $L_4 = h(L_{012})$ ... ~~nützt nichts~~ ?

und (in diesem speziellen Fall)

$L_{012} = h^{-1}(L_4)$ also kann L_4 nicht k.f. sein

d.h. $w \in L_{012} \Rightarrow h(w) \in L_4$ ✓

$w \notin L_{012} \Rightarrow h(w) \notin L_4$ ✓

↳ anzahl 0,1,2 nicht gleich $\Rightarrow h(w) \notin L_4$

weil Anzahlen falsch

Reihenfolge falsch $\Rightarrow$ reihenfolge a,b,c falsch ✓

$h(0) = a$
$h(1) = a$
$h(2) = b$

$h(L_{012}) = \{ a^{2n} b^n \mid .. \} = L_5$

$h^{-1}(L_5) \neq L_{012}$

$L_1 = \{ a^n b^{2n} c^m \mid$

$h(a) = 00$
$h(b) = 1$

$h^{-1}(L_{01}) = \{ w \mid h(w) = 0^n 1^n \}$

$\cancel{= \{ a^{\left(\frac{n}{2}\right)} b^n \mid n \in \mathbb{N} \}}$

$= \{ w \mid h(w) = 0^{2n} 1^{2n} \}$

$= \{ a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \}$

$A \to BC \;,\; A \to a \quad \| \quad A \to BCD \;,\; A \to a$

Bauen Sie eine TM die $\{0^n 1^n 2^n \mid .\}$ erkennt

1) Skizzieren des Programms
2) Begründung Korrektheit
3) Ausformulieren

1) Auf Band $\boxed{\cancel{0}} \ldots 0 \; \cancel{1} \ldots 1 \; 2 \ldots 2 \mid \cancel{e \ldots}$

<u>Idee</u>

a) entferne erste Null, laufe rechts bis keine Null

b) entferne erste 1 - - . keine Eins

c) entferne erste 2

d) Laufe zurück zur ersten 'Null' wiederhole

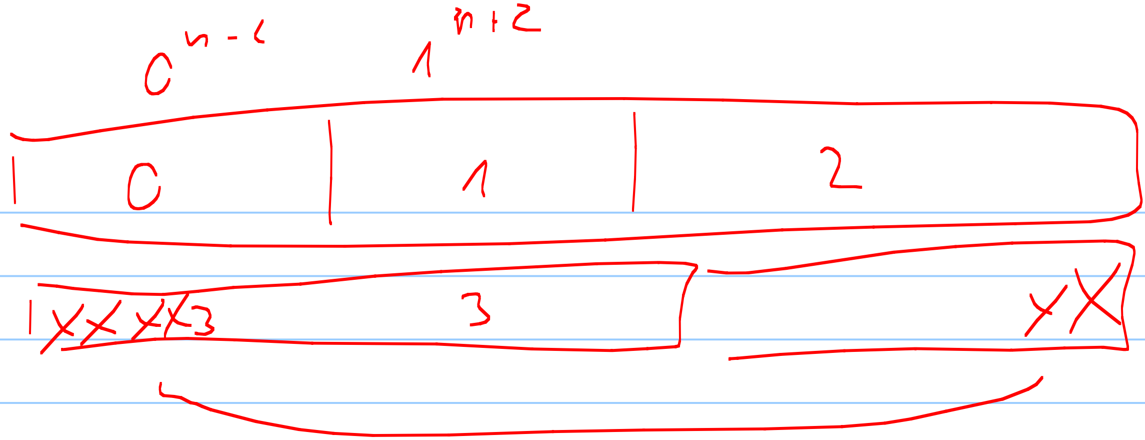
<u>Sonderfälle:</u>

a) keine Null → teste ob Band 'leer'

b) Nach den Nullen keine 1 → abbruch

c) Bzw. keine 2 → abbruch

d) verhindere Endlos Lauf nach links



B	0	1	2	3

q_0 : ersetze eine 0 durch 3, gehe rechts → q_1

q_1 gehe rechts über 0, bis 1 → q_2

q_2 1 bis 2, gehe links q_3

q_3 ersetze 1 durch 3, laufe links q_4

q_4 links über 0, 1 bis B, gehe rechts → q_0

q_0, 1 Fehler q_0, 2 → q_5

q_0, 2 | B "

q_2, 0 | B "

q_5 ersetze 2 durch B, gehe links q_6

q_6 gehe links bis B, dann rechts q_7

q_7 ersetze 3 durch B, rechts q_8

q_8 " , rechts q_9

q_9 gehe rechts über 3, 2 bis B, dann links q_5

q_5, B $\to$ q_{10} Endzustand

		B	0	1	2	3
$\to$	q_0	(q_{10}, B, R)	$(q_1, 3, R)$	–	–	–
	q_1	–	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	–	–
*	q_{10}	–	–	–	–	–