Übung zur Vorlesung

# Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2009/10

**Blatt 1 (Version 3) — Abgabetermin: 03.11.2009, 10:00 Uhr**

---

**Vorbereitung:** Machen Sie sich mit dem mathematischen Grundvokabular (Mengen, Relationen, Äquivalenzrelationen, Abbildungen, vollständige Induktion, rekursive Definitionen und strukturelle Induktion) vertraut. Schauen Sie sich hierzu den Anhang zu den Folien der Einheit 1 an und arbeiten Sie dazu die Kapitel 1.2–1.4 im Buch von Hopcroft, Motwani und Ullman oder den Anfangsteil eines anderen für die Vorlesung empfohlenen Buches durch.

---

## Aufgabe 1.1 (Einfache mathematische Beweisführung: Deduktion)

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Wenn $s$ die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist, dann ist $s$ durch $5$ teilbar.

Formulieren Sie zunächst eine mathematische Darstellung dieser Aussage, ohne natürliche Sprache zu verwenden. Benutzen Sie dazu die Symbole „$\Rightarrow$“ (Implikation), „$\forall$“ (für alle) und „$a|b$“ ($a$ teilt $b$).

## Aufgabe 1.2 (Wahrheitstafel logischer Funktionen)

Geben Sie in einer Tabelle die Wahrheitswerte folgender Aussagen in Abhängigkeit der Wahrheitswerte von $A$ und $B$ an: $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$, $\neg B \;\Rightarrow\; \neg A$, $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, $\neg(\neg B \wedge A)$, $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$. Welche dieser Ausdrücke sind logisch äquivalent?

## Aufgabe 1.3 (Formalisierung mathematischer Konzepte)

Ein Alphabet ist eine endliche, nichtleere Menge von Zeichen. Ein Wort $w$ über einem Alphabet $\Sigma$ ist eine endliche Folge von Zeichen $w = w_0 \ldots w_{n-1}$, wobei $w_i \in \Sigma$ für alle $i$ von $0$ bis $n-1$, $n \in \mathbb{N}$ und $|w| = n$ die Länge des Wortes $w$ ist. Das leere Wort ($|w| = 0$) wird mit $\varepsilon$ bezeichnet. $w\,v$ bezeichnet die Konkatenation (Aneinanderhängung) der Wörter $w$ und $v$. $u^i$ ist die $i$-fache Konkatenation des Wortes (oder Symbols) $u$. Eine Sprache ist eine Menge von Wörtern.
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Beschreiben Sie folgende Mengen und Sprachen mit eigenen Worten:

1. $M_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}.\ x = 3n\}$
2. $M_2 = \{xy \in \mathbb{Z} \mid \exists m, n \in \mathbb{N}.\ (x = 2m) \wedge (y = 2n{+}1)\}$
3. $M_3 = \{awc \mid w = a^n b^n \wedge |w| {>} 8\}$
4. $M_4 = \{wv \mid w \in X \wedge v \in Y\}$, wobei $X = \{s, w, \varepsilon\}$ und $Y = \{o, ein\}$

Formulieren Sie eine mathematische Darstellung der folgenden Mengenbeschreibung, ohne natürliche Sprache zu verwenden:

5. Die Menge $M_5$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen, die Summe zweier ungeraden Zahlen sind und nicht durch 4 teilbar sind.

### Aufgabe 1.4 (Mathematische Beweisführung: strukturelle Induktion)

Ein Palindrom kann als eine Zeichenkette, die vorwärts und rückwärts gelesen gleich lautet, definiert werden, oder aber durch folgende Definition:

1. $\varepsilon$ ist ein Palindrom.
2. Ist $a$ ein beliebiges Symbol, so ist $a$ ein Palindrom.
3. Ist $a$ ein beliebiges Symbol und $x$ ist ein Palindrom, so ist $axa$ ein Palindrom.
4. Keine Zeichenkette ist ein Palindrom, falls sie sich nicht aus 1., 2. oder 3. ergibt.

Beweisen Sie mittels Induktion, dass beide Definitionen äquivalent sind.

### Hausaufgabe 1.5 (Beweisführung)

*[3 Punkte]*

1. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 0$ gilt:

   $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

2. Beweisen Sie das DeMorgan-Gesetz: Für alle Mengen $M$ und $N$ gilt:

   $$\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}$$

   Tipp: Formulieren Sie die Mengengleichheit zunächst als Genau-dann-wenn Ausssage.

## Einige allgemeine Hinweise zu den Übungen

**Aufgaben für die Kleingruppenübung** Diese Aufgaben sollen von Ihnen in kleineren Gruppen während der Übungsstunde gelöst werden. Die Tutoren sollen Ihnen hierbei Hilfestellung geben, aber Sie lernen wenig, wenn Sie sich nur die Lösung zeigen lassen. Der wirkliche Erfolg beginnt, wenn Sie selbst herausfinden, wie ein Problem gelöst werden kann.

Üblicherweise stellen wir etwas mehr Aufgaben, als während der Übungsstunde bearbeitet werden können. Dies liegt daran, daß sich die Zeit für die Bearbeitung nicht immer gut abschätzen läßt. Betrachten Sie die übriggebliebenen Aufgaben als Trainingsmaterial.

**Hausaufgaben** Die Aufgaben haben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrad und gelegentlich werden in der Aufgabenstellung Konzepte vorgestellt, die nicht in der Vorlesung erklärt wurden. Dies ist Absicht, da Sie im Laufe Ihres Studiums auch lernen müssen, wissenschaftliche Texte zu lesen, in denen neue Konzepte nur knapp präsentiert werden.

Bei der Lösung von Hausaufgabe 1.5 erwarten wir ein hohes Maß an Genauigkeit und Gründlichkeit, da die Aufgabenstellung selbst verhältnismäßig einfach ist. In späteren Übungsblättern wird die Problemstellung komplexer sein, so daß ein extrem hoher Detailgrad zu Lasten der Verständlichkeit gehen würde. Bis dahin sollten Sie aber ein Gespür dafür entwickelt haben, welche Details man in einem Beweis auslassen kann, ohne dabei unzulässige Gedankensprünge zu machen.

**Wie löst man Aufgaben effektiv und korrekt?** In vielen Übungsaufgaben werden Sie aufgefordert werden, eine These zu beweisen oder zu widerlegen oder einen Automaten, ein Programm und Ähnliches zu konstruieren. Da man Zusammenhänge oft erst dann richtig versteht, wenn man nicht nur weiß, *daß* eine Sache sich so verhält, sondern auch *warum*, müssen Sie die Korrektheit Ihre Konstruktion immer begründen und zum Teil auch im Detail beweisen. Das Führen von Beweisen soll Ihnen helfen, sich tiefer mit den Themen der Vorlesung zu beschäftigen. Außerdem ist das Beweisen die zentrale wissenschaftliche Methode in der Informatik und gehört deshalb ebenso zum Lehrprogramm wie die Fakten. Für einen korrekten Beweis müssen alle Argumente sauber formuliert werden und der logische Faden der Argumentation muß gut zu erkennen sein. Leider gibt es kein allgemeines Rezept, wie man einen Beweis findet, da Beweisführen wie jede Art von Problemlösen ein kreativer Prozess ist.

Es gibt jedoch eine gewisse Methodik, die schneller zum Erfolg führt. Die folgenden Hinweise sollen Ihnen helfen, Beweise zu finden, lassen sich aber ähnlich auch auf andere Problemstellungen übertragen.

1. Lesen Sie die Problemstellung, die Sie lösen wollen, sorgfältig durch. Haben Sie die Notation vollständig verstanden? Versuchen Sie die Behauptung mit Ihren eigenen Worten zu formulieren. Zerlegen Sie die Aufgabenstellung in kleinere Bestandteile und betrachten Sie jeden Teil separat. Manchmal sind die Teile nicht ohne weiteres zu erkennen, z. B. muß bei "$X$ gilt genau dann wenn $Y$ gilt" sowohl bewiesen werden, daß $X$ aus $Y$ folgt, als auch, daß $Y$ aus $X$ folgt.

2. Sie sollten zunächst versuchen ein gutes Gespür dafür zu entwickeln, warum die Aussage wahr sein sollte. Experimentieren Sie dazu mit Beispielen. Wenn behauptet wird, daß alle Objekte eines bestimmten Typs eine spezielle Eigenschaft haben, sehen Sie sich ein paar davon genauer an und überprüfen Sie das. Nachdem Sie das getan haben, versuchen Sie ein Gegenbeispiel zu konstruieren, d.h. ein Objekt zu finden, daß diese Eigenschaft nicht hat. Wenn die Aussage wahr ist, ist das nicht möglich. Zu verstehen, aus welchem Grund Sie in Schwierigkeiten geraten, wenn Sie ein Gegenbeispiel zu konstruieren versuchen, wird Ihnen helfen zu verstehen, warum die Behauptung wahr ist.

3. Wenn Sie mit einem Beweis feststecken, versuchen Sie zunächst einen Spezialfall Ihrer Aussage zu beweisen. Wenn Sie versuchen zu beweisen, daß eine Eigenschaft für alle $k > 0$ gilt, versuchen Sie sie zuerst für $k = 1$ zu beweisen und bei Erfolg für $k = 2$ usw. bis Sie den allgemeinen Fall verstanden haben. Wenn der Spezialfall zu schwierig ist, versuchen Sie es zunächst mit einem anderen oder mit einem Spezialfall des Spezialfalles.

4. Wenn Sie glauben, daß Sie einen Beweis gefunden haben, müssen Sie alles sauber aufschreiben. Ein gut aufgeschriebener Beweis ist eine Folge von Feststellungen, bei denen jede auf leicht einzusehende Art aus den vorhergehenden folgt. Das sorgfältige Aufschreiben des Beweises ist wichtig für den Leser, damit er ihn nachvollziehen kann und für Sie selbst, um sicher zu gehen, daß er fehlerfrei ist.

**Beurteilung von Hausaufgaben** Für jede Hausaufgabe können Sie maximal 3 Punkte bekommen. Die Punkte werden nach folgenden Regeln vergeben:

*3 Punkte* = die Aufgabe wurde im Wesentlichen korrekt gelöst
*2 Punkte* = die Aufgabe wurde nur teilweise gelöst
*1 Punkt* = die Lösung der Aufgabe enthielt größere Fehler oder Lücken
*0 Punkte* = die Aufgabe wurde nicht gelöst oder enthielt sehr viele Fehler oder Lücken

Die genaue Punktvergabe ist zu einem gewissen Grad Ermessenssache. Wir bemühen uns um größtmögliche Fairness, aber wenn es dennoch einmal daneben gehen sollte, lassen Sie es bitte uns wissen und wir finden schon eine Lösung.

**Sprechzeiten** Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme? Lassen Sie es uns wissen!

- Sprechen Sie in den Übungen Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor an.
- Prof. Dr. Christoph Kreitz, Raum 1.18, kreitz cs.uni-potsdam.de, Tel. (0331) 977 3060,
  **Sprechstunde:** freitags 10.30–12.30 Uhr und immer, wenn die Tür des Raumes 1.18 offen steht
- Thomas Raths, Raum 1.23, traths cs.uni-potsdam.de, Tel. (0331) 977 3069,
  **Sprechstunde:** dienstags 13.00–15.00 Uhr und immer, wenn die Tür des Raumes 1.23 offen steht