Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Thomas Raths
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2009/10

Blatt 2 (Version 2) — Abgabetermin: 10.11.2009, 10:00 Uhr

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Arbeiten Sie sich in das Thema "deterministische und nichtdeterministische endliche Automaten" ein. Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien der Einheiten 2.1 und 2.2 und die Kapitel 1.5 und 2.1–2.3 des Buches von Hopcroft, Motwani und Ullman.

Gute Zusatzinformation zu diesen Themen finden Sie auch in der empfohlenen Literatur und im Internet. Informationsquellen wie Wikipedia sind jedoch mit Vorsicht zu genießen, da sie nicht referiert sind und oft Fehler im Detail enthalten. Für einen ersten Eindruck sind sie jedoch gut geeignet.

Aufgabe 2.1 (Fehlerhafte Beweisführung)

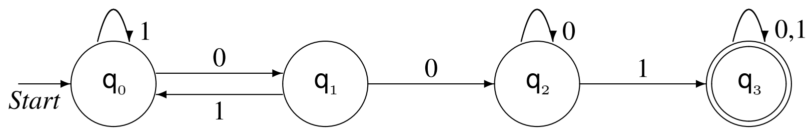
Im folgenden beweisen wir, dass alle Pferde die gleiche Farbe haben. Wo genau liegt der Fehler im Beweis für die folgende Behauptung?

„In jeder Menge von k Pferden haben alle Pferde dieselbe Farbe.“

„Wir beweisen durch Induktion über k: Wenn $k = 1$, dann stimmt die Behauptung trivialerweise, da in einer Menge, die nur ein Pferd enthält, natürlich alle Pferde die gleiche Farbe haben. Für $k \geq 1$ nehmen wir an, dass die Behauptung wahr ist für $k = n$ und zeigen, dass sie für $k = n+1$ gilt. Sei P eine beliebige Menge von $n+1$ Pferden. Wir entfernen ein Pferd von dieser Menge und erhalten so eine Menge P_1 mit n Pferden. Nach Induktionsvorraussetzung haben alle Pferde in P_1 die gleiche Farbe. Nun entfernen wir ein anderes Pferd von P und erhalten die Menge P_2. Nach derselben Argumentation haben auch in P_2 alle Pferde die gleiche Farbe. Da P die Vereinigung von P_1 und P_2 ist, haben auch in P alle Pferde die gleiche Farbe.

Aufgabe 2.2 (Analyse endlicher Automaten)

Gegeben sei der Automat $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{q_3\})$, wobei die Zustandsüberführungsfunktion δ durch die folgende Grafik gegeben ist.



1. Nennen Sie 5 Wörter, die der Automat A akzeptiert. Beschreiben Sie die Abarbeitung des Wortes „01001“ mit Hilfe der erweiterten Zustandsüberführungsfunktion.
2. Versuchen Sie zu verstehen, wie der Automat arbeitet. Finden Sie heraus, welche Eingaben aus dem Startzustand zu den einzelnen Zuständen führen. Beschreiben Sie diese Eingaben in Worte und formal.
3. Erstellen Sie eine möglichst kurze Darstellung der Sprache, die der Automat A akzeptiert.

Aufgabe 2.3 (Konstruktion endlicher deterministischer Automaten)

Entwerfen Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der die Sprache $L = \{01v \mid v \in \{0,1\}^* \}$ akzeptiert. Gehen Sie dabei nach den folgenden vier Schritten vor.

1. Beschreiben Sie die Funktionsweise Ihres Automaten stichpunktartig. Überlegen Sie, welche Zustände für welche bislang gelesenen Eingaben und welche Zustandsübergänge notwendig sind.
2. Stellen Sie das Automatentupel Ihres Automaten auf.
3. Stellen Sie die Zustandsüberführungsfunktion graphisch dar.
4. Stellen Sie die Zustandsüberführungsfunktion tabellarisch dar.

Beweisen Sie, dass Ihr Automat die Sprache L akzeptiert.

Aufgabe 2.4 (Weitere Aufgaben zur Konstruktion von DEA)

Konstruieren Sie deterministische endliche Automaten, die folgende Sprachen akzeptieren.

1. $\{w \in \{a,b,c\}^* \mid \exists v \in \{a,b,c\}^*.\ w{=}vabc$ und $|w|$ mod $3 = 0\}$
2. $\{w \in \{a,b\}^* \mid$ kein Symbol kommt 3 mal hintereinander vor$\}$
3. $\{w \in \{0,1\}^* \mid$ w ist ein Vielfaches von 3, wenn w als Binärdarstellung einer natürlchen Zahl interpretiert wird $\}$

   Dabei wird die Binärdarstellung der natürlichen Zahl vom höchsten zum niedrigsten Bit gelesen, z.B. steht 110 für $1 \cdot 2^2 {+} 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6$.

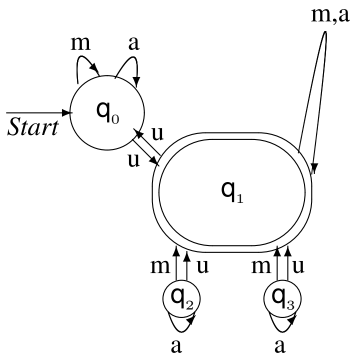
   Tipp: Untersuchen Sie, wie eine natürliche Zahl n sich ändert, wenn nach der bisherigen, als Binärdarstellung von n interpretierten, Eingabe, eine 0 oder 1 gelesen wird. Benutzen Sie für die Modellierung die Restklassen modulo 3.
4. $\emptyset$
5. $\{\varepsilon\}$

Begründen Sie Ihre Lösungen stichpunktartig. Aus diesen Begründungen sollte erkennbar sein, wie Sie auf den entsprechenden Automaten gekommen sind oder wie der Automat arbeitet. Ein Beweis ist nicht erforderlich.

Hausaufgabe 2.5 (Analyse deterministischer endlicher Automaten)

[3 Punkte]

Gegeben sei der endliche Automat A_{cat}=$\{\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{m, a, u\}, \delta_{cat}, q_0, \{q_1\}\}$, wobei die Zustandsübergangsfunktion δ_{cat} durch folgendes Diagramm gegeben ist:



Geben Sie die Sprache L_{cat} an, die der Automat akzeptiert. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Behauptung stichpunktartig.

Hausaufgabe 2.6 (Konstruktion endlicher Automaten)

[3 Punkte]

Entwerfen Sie einen endlichen deterministischen Automaten, der die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{w ist die Binärdarstellung einer Zweierpotenz}\}$$

akzeptiert. Dabei wird die Binärdarstellung vom höchsten zum niedrigsten Bit interpretiert, z.B. steht 00110 für $0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6$. Führende 0'en sollen berücksichtigt werden.
Beweisen Sie, dass Ihr Automat diese Sprache akzeptiert.

Hausaufgabe 2.7 (Konstruktion endlicher Automaten)

[Bonus: 3 Punkte]

Entwerfen Sie einen endlichen deterministischen Automaten, der die Sprache

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \ 3 \mid \#_0(w) \ \text{ und } \ 2 \mid \#_1(w) \ \}$$

akzeptiert. Dabei bezeichnet $\#_0(w)$ die Anzahl der 0'en im Wort w (analog $\#_1(w)$), und $a|b$ bedeutet, dass a Teiler von b ist.
Begründen Sie Ihre Lösung stichpunktartig, indem Sie beschreiben, wie Sie auf Ihren Automaten gekommen sind oder wie er arbeitet. Ein Beweis ist nicht erforderlich.