Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Thomas Raths
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2009/10

Blatt 5 (Version 2) — Abgabetermin: 1.12.2008, 10:00 Uhr

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Arbeiten Sie sich in das Thema "Eigenschaften regulärer Sprachen" ein. Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien 1–18 der Einheit 2.5, die Kapitel 4.2-4.4. des Buches von Hopcroft, Motwani und Ullman, eines der empfohlenen Bücher oder das Internet.

Aufgabe 5.1 (Äquivalenz regulärer Ausdrücke)

Zeigen oder widerlegen Sie die Gültigkeit der folgenden Äquivalenzen (für beliebige reguläre Ausdrücke R, S und T):

1. $R(S+T) \cong RS+RT$
2. $(R^*S^*)^* \cong (R^*S)^*$
3. $R(SR)^* \cong (RS)^*R$

Aufgabe 5.2 (Konversion regulärer Ausdrücke in endliche Automaten)

Geben Sie reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an.

1. $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ beginnt mit $aa\ \}$
2. $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ enthält mindestens ein a und mindestens ein $b\ \}$
3. $\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ beginnt mit a, endet mit b, und $|w|$ ist gerade $\}$
4. beliebige Wiederholung der leeren Menge

Wandeln Sie die regulären Ausdrücke mit dem in der Vorlesung behandelten Verfahren in ε-NEAs um. Nehmen Sie dabei zunächst keine Vereinfachungen vor. Geben Sie dann jedoch einen möglichst einfachen Automaten an.

Aufgabe 5.3 (Konversion endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke)

Gegeben sei ein DEA $A=(\{A,B,C,D\},\{0,1\},\delta,A,\{A\})$, wobei die Übergangsfunktion δ durch die folgende Tabelle gegeben ist:

δ	0	1
$\rightarrow * A$	D	A
B	A	D
C	C	B
D	B	C

Wandeln Sie den Automaten mit Hilfe der Technik der Zustandseliminierung in einen regulären Ausdruck um.

Aufgabe 5.4 (Algorithmus für DEA-Analyse)

Geben Sie einen Algorithmus an, der einen DEA A und eine natürliche Zahl n als Eingabe erhält und die Anzahl der Zeichenfolgen der Länge n berechnet, die von A akzeptiert werden. Die Laufzeit Ihres Algorithmus sollte polynomial mit n und der Anzahl der Zustände in A wachsen.

Hausaufgabe 5.5 (Äquivalenz regulärer Ausdrücke)

[3 Punkte]

Zeigen oder widerlegen Sie die Gültigkeit der folgenden Äquivalenzen (für beliebige reguläre Ausdrücke R und S):

1. $((R+S)(R+S)^*)^* \doteq (R+S)^+ + \varepsilon$
2. $R^*(R+S)^* \doteq (R+SR)^*$
3. $(RS+R)^*R \doteq R(SR+R)^*$

Hausaufgabe 5.6 (Konversion endlicher Automaten in reguläre Ausdrücke)

[3 Punkte]

Gegeben sei ein DEA $A{=}(\{q_1,q_2,q_3,q_4\},\{a,b\},\delta,q_1,\{q_2,q_4\})$, wobei die Übergangsfunktion δ durch die folgende Tabelle gegeben ist:

δ	a	b
$\rightarrow q_1$	q_3	q_2
$*q_2$	q_2	q_3
q_3	q_1	q_4
$*q_4$	q_4	q_3

Wandeln Sie den Automaten mit Hilfe der Technik der Zustandseliminierung in einen regulären Ausdruck um.

Hausaufgabe 5.7 (Varianten nichtdeterministischer Automaten)

[Bonus: 3 Punkte]

Wir betrachten einen neuen Automatentyp, genannt All-Pfad-NEA (AP-NEA). Ein solcher Automat $A=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ funktioniert wie ein NEA, mit der Ausnahme, dass ein Wort genau dann akzeptiert wird, wenn *jeder* mögliche Abarbeitungspfad in einem Endzustand endet (beim NEA genügte ein Pfad). Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird also genau dann akzeptiert, wenn $\emptyset{\neq}\hat{\delta}(q_0,w){\subseteq}F$ ist.

Beweisen Sie, dass AP-NEAs genau die regulären Sprachen akzeptieren. Zeigen Sie dazu, dass für jeden NEA ein äquivalenter AP-NEA konstruiert werden kann und umgekehrt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Hinweis: Formulieren Sie zunächst eine mathematisch präzise Beschreibung der akzeptierten Sprache eines AP-NEA und überlegen Sie sich, wie Sie bereits bekannte Resultate und Methoden der Vorlesung auf dieses Problem übertragen können.