Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Thomas Raths
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2009/10

Blatt 7 (Version 1) — Abgabetermin: 15.12.2008, 10:00 Uhr

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Arbeiten Sie sich in das Thema "Kontextfreie Grammatiken" ein. Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien der Einheit 3.1, die Kapitel 5.1-5.4 des Buches von Hopcroft, Motwani und Ullman, eines der empfohlenen Literatur oder das Internet.

Aufgabe 7.1 (Homomorphismen)

Sei $h' : \{a, b, c\} \to \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$ eine Abbildung mit $h'(a) = \mathtt{1}$, $h'(b) = \mathtt{10}$ und $h'(c) = \mathtt{01}$.

1. Definieren Sie mit Hilfe von h' einen Homomorphismus $h : \{a, b, c\}^* \to \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^*$.
   Warum ist h durch h' bereits eindeutig bestimmt?
   Berechnen Sie $h(bcaab)$.
2. Geben Sie $h(L_i)$ für die Sprachen $L_1 = L(ab^*c)$ und $L_2 = L(a + bc)$ an.
3. Geben Sie $h^{-1}(L_i)$ für die Sprachen $L_1 = \{\mathtt{10101}\}$ und $L_2 = L(\mathtt{1}(\mathtt{01})^*\mathtt{1})$ an.

Aufgabe 7.2 (Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen)

Zeigen Sie, dass die regulären Sprachen bezüglich der folgenden Operationen abgeschlossen sind:

1. $min(L) := \{w \mid w \in L$ und kein echter Präfix von w ist in L enthalten $\}$.
2. $max(L) := \{w \mid w \in L$ und für alle Wörter $x \neq \varepsilon$ gilt $wx \notin L\}$.
3. $init(L) := \{w \mid$ für ein Wort $x \neq \varepsilon$ gilt $wx \in L\}$.

Tipp: Beginnen Sie mit einem DEA für die Sprache L und konstruieren Sie daraus einen Automaten für die gewünschte Sprache.

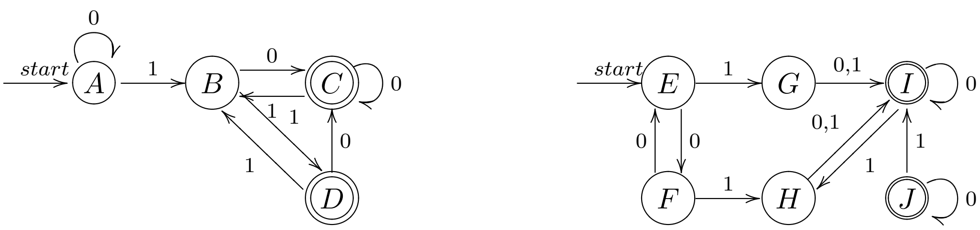
Aufgabe 7.3 (Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen)

Die Sprache $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär. Beweisen Sie unter Verwendung von Operationen, die bekanntermaßen die Regularität erhalten, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

1. $L_1 = \{0^i 1^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$
2. $L_2 = \{0^n 1^m 2^{n-m} \mid n, m \in \mathbb{N}, n \geq m\}$
3. $L_{()} = \{w \in (\Sigma \cup \{(,)\})^* \mid w$ ist korrekt geklammert $\}$ für ein beliebiges Alphabet Σ
4. Zeigen Sie, dass die Vereinigung unendlich vieler regulärer Sprachen nicht unbedingt regulär sein muss.

Aufgabe 7.4 (Äquivalenz von Sprachen, Minimierung von DEAs)

Gegeben seien die beiden endlichen Automaten $A_1 = (\{A, B, C, D\}, \{0, 1\}, \delta_1, A, \{C, D\})$ und $A_2 = (\{E, F, G, H, I, J\}, \{0, 1\}, \delta_2, E, \{I, J\})$, wobei δ_1 und δ_2 durch die folgenden Graphen definiert sind.



Beweisen Sie, dass die Sprachen $L(A_1)$ und $L(A_2)$ äquivalent sind.
Geben Sie anschließend einen minimalen DEA für A_2 an.

Hausaufgabe 7.5 (Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen)

[3 Punkte]

Für zwei Wörter gleicher Länge $u=a_1 \dots a_n$ und $v=b_1 \dots b_n$ sei

$$\mathrm{alt}(u, v) = a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_n b_n.$$

Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathrm{alt}(L_1, L_2) = \{w \mid \exists u \in L_1 . \exists v \in L_2 .\ |u|=|v| \wedge w = \mathrm{alt}(u, v)\}$ regulär ist, wenn L_1 und L_2 regulär sind.

Hausaufgabe 7.6 (Minimierung von DEAs)

[3 Punkte]

Gegeben ist der DEA $A = (\{A, \dots, H\}, \{0, 1\}, \delta, A, \{C, D\})$, wobei δ durch folgende Tabelle definiert ist:

	0	1
$\to A$	B	E
B	G	C
$*C$	G	D
$*D$	F	D
E	F	D
F	G	G
G	F	G
H	A	E

Ermitteln Sie mit Hilfe des Table-Filling-Verfahrens alle Äquivalenzklassen der Zustände.
Geben Sie anschließend einen zu A äquivalenten minimalen DEA an.

Hausaufgabe 7.7 (Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen)

[Bonus: 3 Punkte]

Zeigen Sie, dass die regulären Sprachen bezüglich der folgenden Operation abgeschlossen sind:
$\mathrm{cycle}(L) = \{xy \in \Sigma^* \mid yx \in L\}$ (Σ ist beliebig). Wenn z.B. $L = \{01, 011\}$, dann ist $\mathrm{cycle}(L) = \{01, 10, 011, 110, 101\}$.