Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Thomas Raths
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2009/10

Blatt 11 (Version 1) — Abgabetermin: 26.01.2010, 10:00 Uhr

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Vertiefen Sie das Thema "Eigenschaften Kontextfreier Sprachen" ". Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien der Einheiten 3.3, das Kapitel 7 des Buches von Hopcroft, Motwani und Ullman, eines der empfohlenen Bücher oder das Internet.

Aufgabe 11.1 (Umwandlung einer kontextfreien Grammatik in einen PDA)

Gegeben ist die kontextfreie Grammatik $G = (\{S, A\}, \{0, 1, \#\}, P, S)$, wobei P die folgenden Regeln enthält:

$$S \rightarrow 0S1 \,|\, \#A\#$$
$$A \rightarrow 1A0 \,|\, S \,|\, \varepsilon$$

1. Wandeln Sie G in einen äquivalenten PDA P_ε um, so dass $L(P_\varepsilon) = L(G)$. Verwenden Sie dazu das in der Vorlesung angegebene Verfahren.
2. Wandeln Sie P_ε in einen PDA P_F um, so dass $L(P_F) = L(P_\varepsilon)$.

Aufgabe 11.2 (Umwandlung eines PDA in eine kontextfreie Grammatik)

Gegeben ist der PDA $P = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$, wobei δ wie folgt definiert ist:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\delta(q_0, 1, Z_0) & = & \{(q_0, XZ_0)\} & \delta(q_0, \varepsilon, Z_0) & = & \{(q_0, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, 1, X) & = & \{(q_0, XX)\} & \delta(q_1, 1, X) & = & \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_0, 0, X) & = & \{(q_1, X)\} & \delta(q_1, 0, Z_0) & = & \{(q_0, Z_0)\}
\end{array}$$

Für die nicht aufgeführten Argumente sei der Funktionswert von δ die leere Menge.
Erzeugen Sie mit dem in der Vorlesung angegebenen Verfahren eine kontextfreie Grammatik G mit $L(G) = L(P)$.

Aufgabe 11.3 (Entwurf deterministischer Pushdown Automaten (DPDAs))

Zeigen Sie durch Angabe eines DPDAs, dass $L = \{a^i b^i c^j \mid i, j \geq 1\}$ deterministisch kontextfrei ist.
Ist L regulär? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 11.4 (Sprache von DPDAs)

Für eine Sprache L sei präfixfrei(L) $\equiv$ "*kein Wort aus L ist echtes Präfix eines anderen Wortes aus L.*

Zeigen Sie: Wenn L von einem DPDA durch Leeren des Stacks akzeptiert wird, dann gilt präfixfrei(L).

Hausaufgabe 11.5 (Umwandlung einer kontextfreien Grammatik in einen PDA)

[3 Punkte]

Sei $L = \{a^i b^j c^k \mid i = 2j \text{ oder } j = 2k\}$.

1. Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik $G=(V,T,P,S)$ mit $L=L(G)$ und begründen Sie Ihren Entwurf.
2. Wandeln Sie Ihre Grammatik in einen äquivalenten PDA P_ε um, der durch Leeren des Stacks akzeptiert, so dass $L(P_\varepsilon) = L(G)$. Verwenden Sie dazu das in der Vorlesung angegebene Verfahren.
3. Wandeln Sie P_ε in einen PDA P_F um, der durch Endzustände akzeptiert, so dass $L(P_F) = L(P_\varepsilon)$. Verwenden Sie dazu das in der Vorlesung angegebene Verfahren.

Hausaufgabe 11.6 (Entwurf deterministischer Pushdown Automaten)

[3 Punkte]

1. Entwerfen Sie einen deterministischen PDA, der die Sprache $L = \{a^n b^m a^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ akzeptiert. Begründen Sie knapp Ihre Konstruktion.
2. Gibt es einen DEA A, der die Sprache L akzeptiert?
   Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 11.7 (Minimale Pushdown-Automaten)

[Bonus: 3 Punkte]

Zeigen Sie, dass es für jede kontextfreie Grammatik $G = (V, T, P, S)$, die nur Regeln der Form $A \rightarrow a\beta$ mit $a \in T$ und $\beta \in V^*$ enthält, einen PDA mit genau einem Zustand und ohne ε-Übergänge gibt, der $L(G)$ durch leeren Stack akzeptiert.

Tipp: Benutzen Sie das Verfahren zu Umwandlung einer kontextfreien Grammatik in einen PDA.

Anmerkung: Man kann zeigen, daß jede kontextfreie Sprache L, die das leere Wort nicht enthält, eine Grammatik in der oben beschriebenen sogennaten Greibach Normalform besitzt, welche L erzeugt.