Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Thomas Raths
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2009/10

Blatt 12 (Version 1) — Abgabetermin: 02.02.2010, 10:00 Uhr

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Arbeiten Sie sich in das Thema "Turingmaschinen und Programmiertechniken" ein. Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien der Einheit 4.1, die Kapitel 8.2 und 8.3 des Buches von Hopcroft, Motwani und Ullman, eines der empfohlenen Bücher oder das Internet.

Aufgabe 12.1 (Substitutionen auf Sprachen)

Eine Abbildung $\sigma : \Sigma^* \to \mathcal{L}$ von Wörtern in kontextfreie Sprachen heißt *Substitution*, wenn $\sigma(v_1 \dots v_n) = \sigma(v_1) \circ \dots \circ \sigma(v_n)$ für alle $v_i \in \Sigma$.
Sei σ eine Substitution mit $\sigma(0) = \{a^{m^2} \mid m \in \mathbb{N}\}$ und $\sigma(1) = \{bb\}$.

1. Geben Sie die Abbilder der Wörter 00, 01 und 11 unter σ an.
2. Beschreiben Sie die Sprache $\sigma(\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\})$.
3. Nutzen Sie eine geeignete Abbildung σ', um zu beweisen, dass $L_k = \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ kontextfrei ist.

Aufgabe 12.2 (Abschlusseigenschaften)

Untersuchen Sie ausschließlich mit Hilfe der Abschlusseigenschaften kontextfreier Sprachen, ob die folgenden Sprachen kontextfrei sind. Verwenden Sie dabei, dass die Sprache $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kontextfrei und dass $L_{012} = \{0^n 1^n 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

1. $L_1 = \{0^n 1^{n+m} 2^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
2. $L_2 = \{0^n 1^{n+m} 0^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
3. $L_3 = \{w \in \{0,1,2\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w) = \#_2(w)\}$
4. $L_4 = \{0^{n_1} 2 1^{n_1} 0^{n_2} 2 1^{n_2} \dots 0^{n_m} 2 1^{n_m} \mid m, n_1, n_2, .., n_m \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 12.3 (Chomsky-Normalform)

Sei $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$, wobei P durch folgende Regeln gegeben ist:

$$
\begin{aligned}
S &\to ASA \mid 1B \mid B \\
A &\to B \mid S \\
B &\to 0 \mid \varepsilon
\end{aligned}
$$

Transformieren Sie G mit dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren in eine Chomsky-Normalform, indem Sie die folgenden Schritte abarbeiten.

1. Eliminieren Sie alle ε-Produktionen.
2. Eliminieren Sie alle Einheitsproduktionen.
3. Eliminieren Sie unnütze Symbole.
4. Separieren Sie die Terminalsymbole und Variablen in den Produktionen.
5. Spalten Sie alle Produktionen $A \to \alpha$ mit $|\alpha| > 2$ auf.

Aufgabe 12.4 (Zwei-Stack PDAs)

Die Sprache $L_{012} = \{0^n 1^n 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kann von einem PDA akzeptiert werden, wenn dieser einen zweiten zusätzlichen Stack besitzt.

Erklären Sie, wie dieser PDA arbeiten würde und begründen Sie intuitiv, warum ein einziger Stack nicht ausreicht, um L_{012} zu akzeptieren.

Hausaufgabe 12.5 (Abschlusseigenschaften)

[3 Punkte]

Prüfen Sie ausschließlich mit Hilfe der Abschlusseigenschaften regulärer und kontextfreier Sprachen, ob die Sprachen

1. $L_1 = \{a^n b^{2n} c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}$ und $L_2 = \{a^n b^m c^{2m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.
2. $L_3 = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \wedge (j{=}2i \vee k{=}2j)\}$
3. $L_4 = L_1 \cap L_2$

kontextfrei sind. Verwenden Sie dabei, dass die Sprache $L_{01} = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kontextfrei und dass $L_{012} = \{0^n 1^n 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht kontextfrei ist.

Hausaufgabe 12.6 (Chomsky-Normalform)

[3 Punkte]

Transformieren Sie die Grammatik $G = (\{S, T, U, V, W, X\}, \{1, 2\}, P, S)$ mit
$P = \{S \to \varepsilon \mid 1T1 \mid 2U2,\ T \to S \mid V,\ U \to 1U \mid U2 \mid UW,\ V \to \varepsilon \mid S,\ W \to 1 \mid X2,\ X \to 2 \mid U2 \mid UV\}$
in eine Chomsky-Normalform. Gehen Sie dabei nach dem in der Vorlesung beschriebenen Verfahren vor und geben Sie alle Zwischenschritte an.