Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik I

Prof. Dr. Christoph Kreitz / Thomas Raths
Universität Potsdam, Theoretische Informatik, WS 2009/10

Blatt 14 (Version 1) — Abgabetermin: 11.02.2010, 10:00 Uhr, siehe unten!

Vorbereitung auf die nächste Vorlesung: Arbeiten Sie sich in das Thema "Eigenschaften von $\mathcal{L}_0/\mathcal{L}_1$-Sprachen" ein. Verwenden Sie hierzu z.B. die Vorlesungsfolien der Einheit 4.3, die Kapitel 8 der Bücher von Hopcroft, Motwani und Ullman bzw. von Vossen und Witt, eines der anderen empfohlenen Bücher oder das Internet.

Klausuranmeldung: Informatikstudenten, die nach der neuen Studienordnung studieren, müssen sich bis spätestens 8 Werktage vor der Klausur, also bis zum 11. Februar, für die Klausur anmelden.

Klausurzulassung: Für die Zulassung zur Klausur sind 51 Punkte aus Hausaufgaben, Probeklausur und Quiz hinreichend. Zulassungen aus dem Vorjahr gelten. Die unten stehenden Bonusaufgaben sollten nur diejenigen Studenten abgeben, die bisher noch nicht die erforderlichen Punkte erreicht, aber mindestens Lösungen zu mindestens 3 der letzten 5 Übungsblätter (9–13) eingereicht haben. Beachten Sie, dass Sie die Lösungen bis Donnerstag, den 11. Februar einwerfen müssen, damit eine Korrektur rechtzeitig erfolgen kann. Bitte haben Sie Verständnis dafür, dass wir nur Lösungen von Teilnehmern korrigieren können, die noch nicht zur Klausur zugelassen sind.

Aufgabe 14.1 (Analyse von Turingmaschinen)

Betrachten Sie die TM $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0,1\}, \{0,1,X,B\}, \delta, q_0, B, \{q_5\})$, wobei δ durch die folgende Tabelle gegeben ist.

δ	0	1	X	B
$\rightarrow q_0$	(q_1,B,R)	(q_3,B,R)	(q_0,B,R)	(q_5,B,R)
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,X,L)	(q_1,X,R)	—
q_2	$(q_2,0,L)$	—	(q_2,X,L)	(q_0,B,R)
q_3	(q_4,X,L)	$(q_3,1,R)$	(q_3,X,R)	—
q_4	—	$(q_4,1,L)$	(q_4,X,L)	(q_0,B,R)
$*q_5$	—	—	—	—

1. Zeichnen Sie den zu M gehörenden Automatengraphen!
2. Geben Sie die Ableitung der Wörter ε, 010, 1010 und 0011 mit Hilfe von Konfigurationen an! Werden diese Wörter akzeptiert?
3. Geben Sie eine Beschreibung der TM an. Gehen Sie dabei auf die Bedeutung der einzelnen Zustände, der Hilfssymbole und des aktuellen Bandinhaltes ein.
4. Geben Sie die Sprache L an, die M akzeptiert.
5. Handelt es sich bei $L(M)$ um eine entscheidbare oder eine semi-entscheidbare Sprache?
6. Beweisen Sie mit Hilfe von Konfigurationen, daß für alle $w \in L$ gilt $(\varepsilon, q_0, w) \vdash^* (\varepsilon, q_5, B)$, d.h. daß M tatsächlich alle Wörter aus L akzeptiert.
   Beschreiben Sie hierzu die wichtigsten Zwischenkonfigurationen der Abarbeitung von Eingaben $z \in \{0,1\}^*$ in Form von Aussagen der Form $(\varepsilon, q_0, z) \vdash^* (u, q_i, v)$ und begründen Sie warum die von Ihnen behaupteten Konfigurationsübergänge möglich sind.
   Induktionsbeweise zu Schleifen müssen nicht ausgeführt werden.

Aufgabe 14.2 (Konstruktion von Turingmaschinen)

1. Geben Sie eine NTM M_1 an, die für ein Wort $w \in \{0,1\}^*$ prüft, ob w die Zeichenkette 001 enthält!
2. Konstruieren Sie eine Turingmaschine M_2, die bei Eingabe eines Wortes $v\#w$ mit $v, w \in \{0,1\}^*$ prüft, ob v im Wort w als Teilwort vorkommt, d.h. ob $w = uvx$ für gewisse Wörter $u, x \in \{0,1\}^*$ ist.
3. Beschreiben Sie eine Turingmaschine M_3, welche bei Eingabe eines Wortes $w\#w'$ mit $w, w' \in \{0,1\}^*$ testet, ob w' der lexikographischen Vorgänger w_v von w ist.

   Geben Sie die Übergangstabelle für δ an und begründen Sie die Korrektheit der Turingmaschine.

   Hinweise: Die lexikographische Ordnung der Worte über $\{0,1\}$ beginnt mit der folgenden Liste: $\varepsilon - 0 - 1 - 00 - 01 - 10 - 11 - 000 - 001 - 010$... Der lexikographische Vorgänger von ε ist ε. Es macht Sinn, die Fälle $w = 0^k$ und $w = u\,1\,0^k$ ($k \in \mathbb{N}, u \in \{0,1\}^*$) zu unterscheiden.
4. Konstruieren Sie eine Turingmaschine M_4 mit maximal 6 Zuständen und zwei Hilfssymbolen X und B, welche die Sprache $L = \{0^a 1^b 2^c \mid a, b, c \in \mathbb{N} \wedge a \geq b \geq c\}$ akzeptiert.

Die folgenden Bonusaufgaben sollten nur diejenigen Studenten abgeben, die bisher noch nicht die erforderlichen 51 Punkte erreicht, aber mindestens Lösungen zu mindestens 3 der letzten 5 Übungsblätter (9–13) eingereicht haben. Beachten Sie, dass Sie die Lösungen bis Donnerstag, den 11. Februar einwerfen müssen, damit eine Korrektur rechtzeitig erfolgen kann. Bitte haben Sie Verständnis dafür, dass wir nur Lösungen von Teilnehmern korrigieren können, die noch nicht zur Klausur zugelassen sind.

Hausaufgabe 14.3 (Äquivalenz von DEAs)

[Bonus: 3 Punkte]

Gegeben sind die DEAs

$$A_1 = (\{q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta_1, q_1, \{q_2\}) \text{ und } A_2 = (\{p_1, p_2, p_3, p_4\}, \{0, 1\}, \delta_2, p_1, \{p_3\}),$$

wobei δ_1 und δ_2 wie folgt definiert sind:

	Zustand	0	1
$\rightarrow$	q_1	q_2	q_1
$*$	q_2	q_1	q_2

	Zustand	0	1
$\rightarrow$	p_1	p_3	p_2
	p_2	p_3	p_2
$*$	p_3	p_4	p_3
	p_4	p_3	p_4

Beweisen oder widerlegen Sie, dass A_1 und A_2 äquivalent sind.

Hausaufgabe 14.4 (Kontextfreie Sprachen)

[Bonus: 3 Punkte]

Betrachten Sie die kontextfreien Grammatik $G = (\{S, T, U, V, W, X, Y, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$$\begin{aligned} P = \{ & S \rightarrow ST \mid VV \mid cScS, \\ & T \rightarrow Y, \\ & U \rightarrow a \mid TW, \\ & V \rightarrow c \mid cb \mid bc \mid SS, \\ & W \rightarrow aX \mid b, \\ & X \rightarrow Wb \mid aU \mid bX \\ & Y \rightarrow cY \mid aY \mid YX\} \end{aligned}$$

1. Transformieren Sie G in eine äquivalente Grammatik G' ohne unnütze Symbole.
2. Wandeln Sie die Grammatik G' in einen PDA A um, der $L(G)$ mit mit Leeren des Stacks akzeptiert.
3. Wandeln Sie den PDA A in einen PDA B um, der $L(G)$ mit mit Endzuständen akzeptiert.
4. Wandeln Sie G in eine äquivalente Grammatik G'' in Chomsky Normalform um

Hausaufgabe 14.5 (Nichtreguläre Sprachen)

[Bonus: 3 Punkte]

1. Beweisen Sie ausschließlich durch Anwendung von Abschlußeigenschaften, dass $L_1 = \{w \mid w \in \{a, b\}^* \text{ und } w \text{ enthält doppelt so viele } a \text{ wie } b\}$ nicht regulär ist.
2. Beweisen Sie mit dem Pumping Lemma, dass $L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \wedge \exists t \geq 1. n = tm\}$ nicht regulär ist.