Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Nuria Brede

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2009

Übungsblatt 1 (Version 1) — Abgabetermin: Dienstag, 12.05.09, 16:00 Uhr

---

Zur Vorbereitung ist es sinnvoll, sich mit folgenden Fragen auseinanderzusetzen:

- Was sind Turingmaschinen (TM) und wie funktionieren sie?
- Wie sind die einzelnen Komponenten einer TM formal definiert?
- Was ist die akzeptierte Sprache einer TM, was versteht man unter der von einer TM berechneten Funktion und was bedeuten die Begriffe entscheidbar, semi-entscheidbar und Turing-berechenbar?
- Wie sind Zeit- und Platzkomplexität einer TM definiert?
- Welche Erweiterungen und Einschränkungen des TM-Modells gibt es? Wirken diese sich auf seine Ausdrucksstärke aus?

Kurzquiz 1

(1) Wenn eine Turingmaschine anhält, befindet sie sich in einem Endzustand. **ja** **nein**

(2) Eingabe- und Bandalphabet einer Turingmaschine können gleich sein, müssen es aber nicht. **ja** **nein**

(3) Ist $(3, q_i, 012)$ die Konfiguration einer Turingmaschine, so ist 0 das aktuell gelesene Zeichen. **ja** **nein**

(4) Die Rechenzeit einer Turingmaschine M, die eine rekursiv aufzählbare Sprache L akzeptiert, ist für jedes Eingabewort w definiert als $t_M(w) = max\{j|\alpha(w) \vdash^j (u, q, Xv) \wedge \delta(q, X)$ undefiniert$\}$ **ja** **nein**

(5) Es gibt für jedes Alphabet Σ' eine injektive Repräsentation $r : \Sigma' \to \Sigma^*$ über einem unären Alphabet Σ. **ja** **nein**

Aufgabe 1.1 *(Akzeptierende Turingmaschinen)*

Definieren Sie eine Turingmaschine M_L, die die Sprache $L = \{w_0 w_1 \ldots w_i \,|w_j \in \{0,1\} \wedge \ \exists w_j.w_j = j \bmod 2,\ 0 \leq j \leq i\}$ entscheidet.

(a) Beschreiben Sie die Arbeitsweise Ihrer Maschine informal, aber präzise.

(b) Geben Sie die genaue formale Definition Ihrer Turingmaschine an und zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm.

(c) Geben Sie die Konfigurationsfolgen an, die sich aus der Abarbeitung der Eingaben 1010, 111 und 10100 ergeben.

(d) Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Maschine anhand einer mathematischen Analyse. Geben Sie dabei auch Rechenzeit und Speicherbedarf an.

Aufgabe 1.2 *(Eigenschaften von Turingmaschinen)*

Wieviele unterschiedliche Konfigurationen kann eine Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ höchstens durchlaufen, wenn sie maximal k Bandzellen besucht und nicht terminiert?

Aufgabe 1.3 *(Berechnende Turingmaschinen)*

Definieren Sie eine Turingmaschine M_f, die die Funktion $f(w) = \begin{cases} b^{l+k}c^{m+k} & \text{falls } w = a^k b^l c^m \text{ mit } k, l, m \in \mathbb{N} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

berechnet.

(a) Beschreiben Sie die Arbeitsweise Ihrer Maschine informal, aber präzise.

(b) Geben Sie die genaue formale Definition Ihrer Turingmaschine an und zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm. Denken Sie daran, dass Ihre Maschine nicht terminieren darf, wenn $f(w) = \perp$ und dass der Lese-/Schreibkopf beim Terminieren über dem ersten Symbol der Ausgabe stehen muss.

(Haus-)Aufgabe 1.4 *(Analyse von Turingmaschinen)*

Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Turingmaschine aus Aufgabe 1.3 anhand einer mathematischen Analyse. Geben Sie dabei auch Rechenzeit und Speicherbedarf an.

(Haus-)Aufgabe 1.5 *(Berechnende Turingmaschinen)*

Betrachten Sie die durch folgende Übergangstabelle definierte Turingmaschine M:

	δ	0	1	B
$\rightarrow$	q_0	$(q_1, 1, R)$	$(q_0, 1, R)$	(q_f, B, R)
	q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	(q_2, B, L)
	q_2	(q_2, B, L)	(q_3, B, L)	–
	q_3	$(q_1, 1, R)$	$(q_3, 1, L)$	(q_f, B, R)
*	q_f	–	–	–

Beschreiben Sie die Arbeitsweise von M zunächst informal. Geben Sie anschließend die berechnete Funktion f_M an, und beweisen Sie anhand einer mathematischen Analyse, dass M diese Funktion für alle wohlgeformten Eingaben berechnet.
An welcher Stelle verstößt M gegen eine auf den Vorlesungs-Folien festgelegte Konvention?

Anmerkung: Zur Vereinfachung werden fehlerhafte Eingaben nicht abgefangen.

(Haus-)Aufgabe 1.6 *(Bandkompression)*

Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ gilt: Angenommen, f kann von einer Turingmaschine $M_f = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ berechnet werden, die für jede Eingabe w maximal $2 \cdot s(|w|)$ Zellen auf dem Band benutzt. Dann gibt es eine Turingmaschine $M'_f = (Q', \Sigma', \Gamma', \delta', q'_0, B, F')$, die ebenfalls f berechnet, aber nur $s(|w|)$ Zellen auf dem Band benötigt.
Tipp: Benutzen Sie zur Realisierung von M_f eine 2-spurige Turingmaschine, die durch eine Überführungsfunktion $\delta' : Q' \times (\Gamma' \times \Gamma') \rightarrow Q' \times (\Gamma' \times \Gamma') \times \{L, R\}$ spezifiziert wird, und definieren Sie δ' in Abhängigkeit von δ.

Noch ein paar Hinweise...

Hausaufgaben? In diesem Semester ist die Bearbeitung der Übungen fakultativ. Eine gründliche Auseinandersetzung mit den Aufgaben, sowie aktive Teilnahme an den Übungsgruppen ist jedoch im Hinblick auf die Klausur *dringendst* zu empfehlen. Zur Selbstkontrolle können Sie die von Ihnen bearbeiteten Übungen auch gerne von uns korrigieren lassen (in diesem Fall gelten die genannten Abgabetermine). Falls Sie Schwierigkeiten haben, sprechen Sie uns an! Je genauer wir wissen, wo Ihre Probleme liegen, umso gezielter können wir darauf eingehen.

Sprechzeiten: Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme?

- Sprechen Sie in den Übungen Ihre Tutorin, bzw. Ihren Tutor an.
- Prof. Dr. Christoph Kreitz, Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. (0331) 977 3060,
  Sprechstunde: mittwochs 9.30-10.30 Uhr und immer, wenn die Tür des Raumes 1.18 offen steht
- Nuria Brede, Raum 1.24, brede@cs.uni-potsdam.de, Tel. (0331) 977 3071,
  Sprechstunde: donnerstags 13-14 Uhr und nach Vereinbarung