

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Nuria Brede

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2009

Übungsblatt 2 (Version 1) — Turingmaschinen: Vertiefung

Zur Vorbereitung ist es sinnvoll, sich mit folgenden Fragen auseinanderzusetzen:

- Was ist die akzeptierte Sprache einer TM, was versteht man unter der von einer TM berechneten Funktion und was bedeuten die Begriffe entscheidbar, semi-entscheidbar und Turing-berechenbar?
 - Wie sind Zeit- und Platzkomplexität einer TM definiert?
 - Welche Erweiterungen und Einschränkungen des TM-Modells gibt es? Wie wirken diese sich auf die akzeptierte Sprachklasse aus?
-

Kurzquiz 2

- (1) Der Speicherbedarf einer Turingmaschine ist definiert als die Anzahl der Konfigurationen, die durchlaufen werden, bis ein Endzustand erreicht ist. **ja nein**
 - (2) Ist w das Eingabewort und $\alpha(w)$ die Anfangskonfiguration einer deterministischen Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, die bei Eingabe von w anhält, so gilt $\forall w. |\{j | \exists q \in Q. \exists X \in \Gamma. \exists u, v \in \Gamma^*. (\alpha(w) \vdash^j (u, q, Xv) \wedge \delta(q, X) \text{ undefiniert})\}| = 1$. **ja nein**
 - (3) Eine Turingmaschine, die eine Funktion $f(n)$ berechnet, hält in einem Endzustand, wenn f für n definiert ist und in einem Nicht-Endzustand, wenn f für n undefiniert ist. **ja nein**
 - (4) Die Komplexität der von einer Turingmaschine berechneten Funktion hängt auch von der Codierung der Eingabe ab. **ja nein**
 - (5) Eine nicht-deterministische Turingmaschine kann mehr Funktionen berechnen als eine deterministische Turingmaschine. **ja nein**
-

Aufgabe 2.1 (Ausdrucksstärke von Automatenmodellen)

- (a) Die *Ausdrucksstärken*-Relation auf Automatenmodellen sei eine partielle Ordnung, die wie folgt definiert ist: Seien \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 zwei Automatenmodelle und $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1}$ und $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_2}$ ihre jeweils akzeptierten Sprachklassen. Dann gilt $(\mathcal{A}_1 <_A \mathcal{A}_2) \Leftrightarrow (\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1} \subset \mathcal{L}_{\mathcal{A}_2})$ und $(\mathcal{A}_1 =_A \mathcal{A}_2) \Leftrightarrow (\mathcal{L}_{\mathcal{A}_1} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}_2})$. Ordnen Sie die folgenden Automatenmodelle nach ihrer Ausdrucksstärke unter Benutzung der Relationssymbole $<_A$ und $=_A$:

- | | | |
|--------|---------------------|-------|
| • DEA | • DPDA mit 2 Stacks | • DTM |
| • NEA | • DPDA mit 3 Stacks | |
| • DPDA | • NPDA | • NTM |

(b) Wie würden Sie folgende Varianten von Turingmaschinen in Bezug auf ihre Ausdrucksstärke einordnen? Begründen Sie Ihre Antwort!

- Eine Turingmaschine mit semi-unendlichem Band, deren Überföhrungsfunktion die Form $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R, RESET\}$ hat, wobei *RESET* bedeutet, dass der Lese-/Schreib-Kopf an das linke Ende des Bandes zuröckspringt.
- Eine Einband-Turingmaschine, die im Bereich der Eingabe nicht auf das Band schreiben kann.

Aufgabe 2.2 (Rechenzeit)

Auf den Vorlesungsfolien (Einheit 5.1, Folien 10-11) sind die Turingmaschinen $M_2 - M_5$ definiert. Schätzen Sie die Rechenzeit dieser Maschinen in Abhängigkeit von der Länge des Eingabeworts ab.

Aufgabe 2.3 (Zusammenhang Akzeptieren/Berechnen)

Der Zusammenhang zwischen akzeptierenden und berechnenden Turingmaschinen lässt sich dadurch herstellen, dass jede Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ als die Menge $graph(f) = \{(x, y) | f(x) = y\}$ beschreibbar ist: f ist genau dann berechenbar, wenn $graph(f)$ semi-entscheidbar ist. Beschreiben Sie informal, aber präzise, wie Sie beide Richtungen dieser Äquivalenz beweisen würdien!

Aufgabe 2.4 (Simulation von Turingmaschinen)

Gegeben sei eine 2-dimensionale Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$, die anstelle eines eindimensionalen Bandes ein 2-dimensionales Feld benutzt, das in zwei Richtungen unendlich ist. Die Eingabe beginnt in der linken unteren Ecke dieses Feldes und der Schreib-/Lesekopf kann sich nach oben, unten, rechts oder links bewegen. Die Zustandsüberföhrungsfunktion ist somit definiert als $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, O, U\}$. (Es darf angenommen werden, dass die Ränder des Feldes markiert sind und entsprechend in der Überföhrungsfunktion beachtet werden.)

- (a) Wie könnte der Inhalt des Bandes von M auf dem Band einer eindimensionalen Turingmaschine M' gespeichert werden?
- (b) Wie würdien demzufolge die jeweiligen Kopf-Bewegungen von M nach links, rechts, oben und unten mit M' simuliert?
Tipp: Eine festgelegte Anzahl von Hilfsbandern darf benutzt werden und der Kopf des Hilfbandes darf auch stehen bleiben.
- (c) Geben Sie die formale Beschreibung von M' an. Definieren Sie dabei δ' in Abhängigkeit von δ .

Anmerkung: Eine 2-Band-Turingmaschine mit einem 2. Band, dessen Kopf sich nicht bei jedem Schritt bewegen muss, lässt sich formal beschreiben als $M' = (Q', \Sigma', (\Gamma' \times \Gamma'), \delta', q'_0, B, F')$ und $\delta' : Q' \times (\Gamma' \times \Gamma') \rightarrow Q' \times (\Gamma' \times \Gamma') \times (\{L, R\} \times \{L, R, N\})$.

Aufgabe 2.5 (Simulation von Turingmaschinen)

Wie in der Vorlesung erwähnt, lassen sich k -bandige Turingmaschinen auf einbandigen Turingmaschinen unter Benutzung von $2k + 1$ Spuren simulieren. Angenommen, wir simulieren eine k -bandige Turingmaschine M mit Bandalphabet Γ . Wie viele Symbole muss dann das Bandalphabet einer einbandigen Turingmaschine M' enthalten, die M simuliert, wenn

- (a) M' eine Spur verwendet und jedes Symbol folgende Informationen codiert:
 - den Bandinhalt der k Bänder an dieser Position,

- ob der Lese-/Schreibkopf des jeweiligen Bandes sich an dieser Position befindet und
- ob sich alle Kopf-Markierungen links von der aktuellen Position befinden oder nicht (Endmarkierung).

(b) das Bandalphabet von M' minimal sein soll?

!!! Belegung der Übungsgruppen !!!

Übungsgruppe überfüllt? Beim 1. Treffen war die Übungsgruppe am Mittwoch hoffnungslos überfüllt. Es wäre daher gut, wenn einige Teilnehmer auf eine der Übungsgruppen am Montag (um 11.00Uhr, bzw. um 14.00Uhr) oder am Dienstag (um 14.00Uhr) ausweichen würden.

Wie immer: Falls Sie Schwierigkeiten haben, sprechen Sie uns an! Je genauer wir wissen, wo Ihre Probleme liegen, umso gezielter können wir darauf eingehen.

Sprechzeiten: Haben Sie Fragen, Anregungen oder Probleme?

- Sprechen Sie in den Übungen Ihre Tutorin, bzw. Ihren Tutor an.
- Prof. Dr. Christoph Kreitz, Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. (0331) 977 3060,
Sprechstunde: mittwochs 9.30-10.30 Uhr und immer, wenn die Tür des Raumes 1.18 offen steht
- Nuria Brede, Raum 1.24, brede@cs.uni-potsdam.de, Tel. (0331) 977 3071,
Sprechstunde: donnerstags 13-14 Uhr und nach Vereinbarung