

# Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Nuria Brede

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2009

Übungsblatt 4 (Version 1) — Abgabetermin: Dienstag, 26.05.09, 16:00 Uhr

---

**Zur Vorbereitung ist es sinnvoll, sich mit folgenden Fragen auseinanderzusetzen:**

- Aus welchen Grundfunktionen und welchen Operationen auf Funktionen können rekursive Funktionen gebildet werden? Wodurch unterscheiden sich rekursive und primitiv-rekursive Funktionen?
  - Gibt es berechenbare totale Funktionen, die nicht primitiv-rekursiv sind?
  - Welche Funktionen beinhalten die Klassen der primitiv-rekursiven, total-rekursiven und rekursiven Funktionen ( $\mathcal{PR}$ ,  $\mathcal{TR}$  und  $\mathcal{R}$ ) und in welchem Verhältnis stehen sie zueinander und zur Klasse der Turing-berechenbaren Funktionen?
  - Was ist der  $\lambda$ -Kalkül und aus welchen Basisregeln besteht er? Wie werden  $\lambda$ -Terme ausgewertet? Was versteht man unter einer Substitution?
  - Wie lassen sich Programm- und Datenstrukturen als  $\lambda$ -Ausdrücke codieren?
- 

## Kurzquiz 4

- (1) Der Ausdruck  $\mu[mul]$  beschreibt die Identitätsfunktion, wenn  $mul(m, n) = m * n$ . **ja nein**
  - (2) Die Schachtelungstiefe der Großen Ackermannfunktion ist unbegrenzt. **ja nein**
  - (3) Falls die Variable  $x$  in einem  $\lambda$ -Term  $t$  frei vorkommt, entsteht der Ausdruck  $t$  durch die Substitution  $t[a/x]$ . **ja nein**
  - (4) Eine Fallunterscheidung `if a then b else c` kann im  $\lambda$ -Kalkül anhand des Terms  $a b c$  ausgedrückt werden. **ja nein**
  - (5) Der  $\lambda$ -Term  $\lambda x.f(f(f(f(f(x)))))$  ist die Repräsentation der Zahl 5 als Church Numeral. **ja nein**
- 

## Aufgabe 4.1 (Rekursive Relationen und ihre Abschlusseigenschaften)

**Zur Erinnerung:** Eine  $k$ -stellige Relation  $R$  auf den natürlichen Zahlen ist beschreibbar als Menge von  $k$ -Tupeln, für die  $R(x_1, \dots, x_k)$  gilt,  $x_j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq k$ . Eine solche Relation heißt primitiv-rekursiv, falls ihre charakteristische Funktion  $\chi_R$  primitiv-rekursiv ist, wobei

$$\chi_R(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } R(x_1, \dots, x_k) \text{ gilt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

**Definition:** Eine  $n$ -stellige Relation  $S$  ist  $\mu$ -rekursiv, wenn sie aus einer primitiv-rekursiven  $(n + 1)$ -stelligen Relation  $R$  durch existenzielle Quantifizierung entsteht, also:  $S(x_1, \dots, x_n) \Leftrightarrow \exists y.R(x_1, \dots, x_n, y)$ .

Beweisen oder widerlegen Sie:

Angenommen zwei  $k$ -stellige Relationen  $S_1$  und  $S_2$  sind  $\mu$ -rekursiv. Dann ist ihre Konjunktion  $S_\wedge$  mit

$$S_\wedge(x_1, \dots, x_k) \Leftrightarrow S_1(x_1, \dots, x_k) \wedge S_2(x_1, \dots, x_k)$$

ebenfalls  $\mu$ -rekursiv.

### Aufgabe 4.2 (Substitution)

Führen Sie folgende Substitutionen durch:

- (a)  $(\lambda x. \lambda y. x y z)[x/z]$
- (b)  $(\lambda x. \lambda y. x y z)[a/y]$
- (c)  $(\lambda x. \lambda y. x y z)[a/z]$

### Aufgabe 4.3 (Auswertung von $\lambda$ -Termen)

In der Vorlesung wurden die Church Numerals zur Repräsentation der natürlichen Zahlen definiert. Sehen Sie sich nun die Definitionen der  $\lambda$ -Terme `add`, `mul` und `zero` auf Folie 8 (Einheit 5.3) an.

- (a) Reduzieren Sie die  $\lambda$ -Terme `add 2 4`, `mul 3 0` und `mul 3 2` so weit wie möglich.
- (b) Zeigen Sie, dass der  $\lambda$ -Term `zero 0` zu `T` reduziert und der  $\lambda$ -Term `zero n` zu `F` für alle  $n > 1$ .

### Aufgabe 4.4 ( $\beta$ -Normalform)

**Definition:** Ein  $\lambda$ -Term ist in  $\beta$ -Normalform, wenn keine weiteren  $\beta$ -Reduktionen mehr möglich sind.

Betrachten Sie folgende Aussage: "Jeder  $\lambda$ -Term ist nach endlich vielen  $\beta$ -Reduktionsschritten in  $\beta$ -Normalform." Trifft diese Aussage zu? Begründen Sie Ihre Antwort!

### (Haus-)Aufgabe 4.5 (Turingmaschinen und rekursive Funktionen)

Geben Sie Ablaufbeschreibungen für Turingmaschinen  $M_a$  und  $M_b$  an, die  $f_a$ , bzw.  $f_b$  berechnen!

- (a) Primitive Rekursion: Die Funktion  $f_a : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^+$  sei definiert durch  $f_a(\vec{x}, 0) = g_a(\vec{x})$  und  $f_a(\vec{x}, y + 1) = h_a(\vec{x}, y, f_a(\vec{x}, y))$  und  $g_a$  und  $h_a$  werden berechnet durch Turingmaschinen  $M_{g_a}$  und  $M_{h_a}$ .
- (b)  $\mu$ -Rekursion: Die Funktion  $f_b : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^+$  sei definiert durch  $f_b(\vec{x}) = \mu_y [g_b(\vec{x}, y) = 0]$  und  $g_b$  werde berechnet durch eine Turingmaschine  $M_{g_b}$ .

### (Haus-)Aufgabe 4.6 (Logische Operatoren im $\lambda$ -Kalkül)

In der Vorlesung wurde die Darstellung der Booleschen Operatoren `T`, `F` und `if b then s else t` im  $\lambda$ -Kalkül definiert. Benutzen Sie diese Konstrukte, um Operatoren für die logische Konjunktion `and` und die logische Disjunktion `or` anzugeben. Zeigen Sie die Korrektheit ihrer Definitionen!

### (Haus-)Aufgabe 4.7 (Primitive Rekursion - zum Tüfteln)

**Definition:** Eine berechenbare  $(n + 1)$ -stellige Funktion  $U$  mit der Eigenschaft, dass für jede  $n$ -stellige Funktion  $f \in \mathcal{PR}$  ein  $i$  existiert, so dass  $U(x_1, \dots, x_n, i) = f(x_1, \dots, x_n)$ , heisst *universelle Funktion*.

Zeigen Sie: Die 2-stellige universelle Funktion  $u(x, i) = f_i(x)$  mit  $f_i \in \mathcal{PR}$  kann nicht primitiv-rekursiv sein. *Hinweis:* Diese Aufgabe lässt sich mit Hilfe der *Cantorschen Diagonalisierung* lösen.

### Zur Erinnerung...

In diesem Semester ist die Bearbeitung der Übungen fakultativ. Zur Selbstkontrolle ist es jedoch sinnvoll, die von Ihnen bearbeiteten Übungen korrigieren zu lassen (in diesem Fall gilt der Abgabetermin).

### Und ganz wichtig:

Falls Sie Schwierigkeiten haben, sprechen Sie uns an! Auch wenn es etwas Überwindung kostet, Fragen hilft!