Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Nuria Brede
Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2009

Übungsblatt 5 (Version 1) — Abgabetermin: Dienstag, 02.06.09, 16:00 Uhr

---

Zur Vorbereitung ist es sinnvoll, sich mit folgenden Fragen auseinanderzusetzen:

- Wie lassen sich Programm- und Datenstrukturen als λ-Ausdrücke codieren? Was ist ein Fixpunktkombinator und wofür wird er verwendet?
- Wie lassen sich Funktionen in logischen Theorien repräsentieren?
- Woraus besteht die Theorie $\mathcal{Q}$? Wie kann $\mathcal{Q}$ interpretiert werden? Welche Funktionen lassen sich in $\mathcal{Q}$ darstellen?
- Was besagt die Churchsche These?
- Was bedeuten die Kernaxiome der Berechenbarkeitstheorie?

Kurzquiz 5

(1)	Alle λ-berechenbaren Funktionen sind in der Klasse total rekursiver Funktionen $\mathcal{TR}$ enthalten.	**ja**	**nein**
(2)	Für das Funktionssymbol **s** der arithmetischen Theorie $\mathcal{Q}$ gibt es genau eine mögliche Interpretation.	**ja**	**nein**
(3)	Die Church'sche These besagt, dass die Klasse der Turing-berechenbaren Funktionen und die Klasse der intuitiv berechenbaren Funktionen übereinstimmen.	**ja**	**nein**
(4)	Die lexikographische Ordnung von Wörtern über einem Alphabet kann dazu genutzt werden, Berechenbarkeit auf Wörtern durch Berechenbarkeit auf Zahlen auszudrücken.	**ja**	**nein**
(5)	Jeder Turingmaschine M_i kann eine eindeutige Gödelnummer j zugeordnet werden.	**ja**	**nein**

Aufgabe 5.1 *(Konstruktion von λ-Termen)*

Geben Sie λ-Terme zur Berechnung der folgenden Funktionen an. Sie dürfen dazu aus der Vorlesung bekannte Grundfunktionen benutzen.

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 5x + 3$

(b) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(x) = x!$

Aufgabe 5.2 *(Repräsentierbarkeit in $\mathcal{Q}$)*

Zeigen Sie, dass die Funktionen min, max, $sqrt$, kgV und ggT (siehe Einheit 5.2, Folie 9) in der Theorie $\mathcal{Q}$ dargestellt werden können. Geben Sie dazu Prädikate an, die diese Funktionen repräsentieren.

Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Repräsentation der Funktion min (Betrachten Sie dazu den Beweis zum Prädikat ADD auf Folie 19 im Anhang von Einheit 5.3).

Aufgabe 5.3 *(Codierung von Turingmaschinen)*

In der Vorlesung wurde eine Möglichkeit beschrieben, Turingmaschinen als Wörter über einem Alphabet zu codieren (siehe Einheit 5.4, Folie 3).

(a) Geben Sie eine mit der Vorlesung konforme Codierung der Turingmaschine M_5 aus Einheit 5.1 an.

(b) Geben Sie eine lexikographische Ordnung auf dem in Teil (a) benutzten Alphabet an. Welche Funktion berechnet die nach dieser Ordnung "kleinste" Turingmaschine mit der Gödelnummer 0?

(Haus-)Aufgabe 5.4 *(Fixpunktkombinatoren im λ-Kalkül)*

(a) Sei $\Theta \equiv (\lambda \mathsf{x}.\lambda \mathsf{y}.(\mathsf{y}\ (\mathsf{x}\,\mathsf{x}\,\mathsf{y})))\ (\lambda \mathsf{x}.\lambda \mathsf{y}.(\mathsf{y}\ (\mathsf{x}\,\mathsf{x}\,\mathsf{y})))$. Zeigen Sie, dass für alle λ-Terme $\mathtt{t}$ gilt: $\Theta\,\mathsf{t} \xrightarrow{\beta} \mathsf{t}\,(\Theta\,\mathsf{t})$.

(b) Es seien $\mathsf{Y}^0 \equiv \mathsf{Y}$ und $\mathsf{Y}^{\mathsf{n}+1} \equiv (\mathsf{Y}^{\mathsf{n}})\ ((\lambda \mathsf{x}.\lambda \mathsf{y}.\lambda \mathsf{z}.\mathsf{x}\ \mathsf{z}\ (\mathsf{y}\ \mathsf{z}))\ (\lambda \mathsf{x}.\mathsf{x}))$. Zeigen Sie, dass gilt: $\mathsf{Y}^1 \xrightarrow{\beta} \Theta$.

Hintergrund: Y ist der bekannteste Fixpunktkombinator – gilt jedoch auch als "paradoxer" Fixpunktkombinator, da *nicht* gilt, dass $\mathsf{Y}\ \mathsf{t} \xrightarrow{\beta} \mathsf{t}\ (\ \mathsf{Y}\ \mathsf{t})$ für alle λ-Terme $\mathtt{t}$. Alan Turing fand mit Θ einen Fixpunktkombinator, der in diesem Sinne nicht "paradox" ist. Aufgabenteil (b) setzt Θ und Y in Bezug zueinander. Anhand der rekursiven Definition von Y^{n} lässt sich auch zeigen, dass es unendlich viele Fixpunktkombinatoren gibt.

(Haus-)Aufgabe 5.5 *(Die arithmetische Theorie $\mathcal{Q}$)*

Die Theorie $\mathcal{Q}$ ist zwar stark genug, um berechenbare Funktionen zu repräsentieren – ihre Ausdrucksstärke ist durch das Fehlen des Induktionsschemas jedoch eingeschränkt. So ist es in Bezug auf die natürlichen Zahlen oft nur möglich, Eigenschaften spezieller Instanzen (z.B. $\overline{3}+\overline{2} = \overline{2}+\overline{3}$) zu beweisen, nicht aber die entsprechenden allgemeinen Eigenschaften (z.B. $\forall x, y.x + y = y + x$).

Folgende Aussagen sind daher in $\mathcal{Q}$ nicht allgemeingültig:

(Q_1^*) $\forall x.x \neq s(x)$

(Q_2^*) $\forall x, y.x + y = y + x$

(Q_3^*) $\forall x, y, z.x + (y + z) = (x + y) + z$

(Q_4^*) $\forall x.\overline{0} + x = x$

(Q_5^*) $\forall x, y.x * y = y * x$

(Q_6^*) $\forall x.\overline{0} * x = \overline{0}$

Konstruieren Sie eine Interpretation von $\mathcal{Q}$, in der die Axiome Q_1– Q_7 aus den Vorlesungsfolien erfüllt sind, die Formeln Q_1^*– Q_6^* jedoch nicht gelten.

Hinweis: Eine solche Interpretation kann nicht die Standardinterpretation von $\mathcal{Q}$ sein. Machen Sie sich daher zunächst bewusst, was es konkret bedeutet, wenn obige Aussagen nicht gelten, und „testen“ Sie Ihre Ansätze, indem Sie überprüfen, ob die Axiome Q_1– Q_7 weiterhin erfüllt werden.

(Haus-)Aufgabe 5.6 *(Codierung der Axiome von $\mathcal{Q}$ mit Primzahlen)*

Auch zahlentheoretische Aussagen wie die der Theorie $\mathcal{Q}$ lassen sich durch Gödelnummern codieren. Eine solche Codierung arithmetischer Formeln bildet die Grundlage für Gödels Unvollständigkeitssatz.

Sei F^* die abzählbare Menge der Wörter der formalen Sprache von $\mathcal{Q}$. Die Funktion $g : F^* \rightarrow \mathbb{N}$ ist eine „Gödelisierung“, wenn sie injektiv und berechenbar, ihre Bildmenge $g(F^*)$ entscheidbar, und ihre Umkehrfunktion g^{-1} berechenbar ist. $g(x)$ heisst dann Gödelnummer.

Überlegen Sie sich eine Gödelisierung für die formale Sprache der Theorie $\mathcal{Q}$ auf Basis der Primzahlen. Das Alphabet F sei die Vereinigung der Mengen der Funktionssymbole, Konstanten, Variablen, logischen Operatoren und der syntaktischen Begrenzer (Punkt, Komma, Klammern). Beachten Sie dabei, dass die Menge der Variablen abzählbar unendlich ist. Berechnen Sie anhand ihrer Gödelisierung die Gödelnummern der Axiome Q_1– Q_7 von $\mathcal{Q}$.

Zur Erinnerung...
In diesem Semester ist die Bearbeitung der Übungen fakultativ. Zur Selbstkontrolle ist es jedoch sinnvoll, die von Ihnen bearbeiteten Übungen korrigieren zu lassen (in diesem Fall gilt der Abgabetermin).

Und ganz wichtig:
Falls Sie Schwierigkeiten haben, sprechen Sie uns an! Auch wenn es etwas Überwindung kostet, Fragen hilft!