Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Nuria Brede
Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2009

Übungsblatt 6 (Version 1) — Abgabetermin: Dienstag, 09.06.09, 16:00 Uhr

---

Zur Vorbereitung ist es sinnvoll, sich mit folgenden Fragen auseinanderzusetzen:

- Was bedeuten die Kernaxiome der Berechenbarkeitstheorie?
- Was bedeuten die Begriffe „(rekursiv) aufzählbar", „entscheidbar", „berechenbar", „rekursiv" und „semi-entscheidbar"? Wie hängen diese Begriffe zusammen?
- Worin unterscheiden sich Aufzählbarkeit und Abzählbarkeit?
- Unter welchen Operationen sind aufzählbare und entscheidbare Mengen abgeschlossen?
- Was bedeutet Unlösbarkeit eines Problems?

Kurzquiz 6

(1)	Eine Menge M ist aufzählbar, wenn es eine bijektive Funktion gibt, die M auf $\mathbb{N}$ abbildet.	**ja**	**nein**
(2)	Anhand des SMN-Theorems lässt sich zeigen, dass sich primitiv-rekursive Funktionen effektiv kombinieren lassen.	**ja**	**nein**
(3)	Sei u die universelle Funktion. Dann ist das Komplement der Bildmenge $range(u)$ aufzählbar.	**ja**	**nein**
(4)	Ist eine Menge D entscheidbar, so gibt es eine berechenbare Funktion, deren Definitionsbereich D ist.	**ja**	**nein**
(5)	Für die Menge F der berechenbaren Funktionen auf den natürlichen Zahlen gilt: F ist eine echte Teilmenge der Menge, die alle Funktionen auf $\mathbb{N}$ enthält.	**ja**	**nein**

Aufgabe 6.1 *(Entscheidbarkeit)*

Es sei $w = 1$, falls es nächsten Montag regnet, ansonsten sei $w = 0$. Sei M eine Menge, die nur die Zeichenkette w enthält. Ist M entscheidbar?

Aufgabe 6.2 *(Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit)*

Zeigen Sie, ob die Mengen M_1,M_2 und M_3 entscheidbar oder semi-entscheidbar sind:

(a) $M_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ ist das Produkt zweier Primzahlen$\}$

(b) R sei eine primitiv-rekursive, 2-stellige Relation auf den natürlichen Zahlen.
$M_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}$, so dass $R(x, y)$ gilt.$\}$

(c) $M_3 = range(f)$, falls f eine streng monotone, berechenbare und totale Funktion ist.

Aufgabe 6.3 *(Aufzählbarkeit und Abzählbarkeit)*

(a) Zeigen Sie, dass alle aufzählbaren Mengen auch abzählbar sind.

(b) Sind alle abzählbaren Mengen auch aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6.4 *(Selbstreferenz und Diagonalisierung)*

Diese Übung soll helfen, sich über das Grundprinzip der Diagonalisierung klar zu werden.

Das Symbol x soll im Folgenden eine Variable sein, für die beliebige Ausdrücke der deutschen Sprache eingesetzt werden dürfen. Unter der *Diagonalisierung* eines Ausdrucks A verstehen wir den Ausdruck A', den wir erhalten, wenn wir die *Zitierung* „A“ des Ausdrucks selbst für jedes Vorkommen von x im ursprünglichen Ausdruck A einsetzen.

Betrachten Sie zunächst die Ausdrücke (i)–(iv):

(i) Tweety liest x.

(ii) Tweety liest „Tweety liest x“.

(iii) Tweety liest die Diagonalisierung von x.

(iv) Tweety liest die Diagonalisierung von „Tweety liest die Diagonalisierung von x“.

Beantworten Sie nun folgende Fragen:

(a) Wie verhalten sich Ausdruck (i) und (ii) zueinander? Wie ist das Verhältnis von Ausdruck (iii) und (iv)?

(b) Welche(r) dieser Sätze ist/sind selbst-referenziell, bezieht/beziehen sich also auf sich selbst? Warum?

(Haus-)Aufgabe 6.5 *(Abschlusseigenschaften semi-entscheidbarer Sprachen)*

Zeigen oder widerlegen Sie mit Hilfe von Turingmaschinen:

(a) Die Vereinigung zweier semi-entscheidbarer Sprachen L_1 und L_2...

(b) Der Schnitt zweier semi-entscheidbarer Sprachen L_1 und L_2...

(c) Das Komplement einer semi-entscheidbaren Sprache L_1...

(d) Die Differenz zweier semi-entscheidbarer Sprachen L_1 und L_2...

...ist ebenfalls semi-entscheidbar. Es genügt, die Konstruktion zu skizzieren. Argumentieren Sie mit Mehrband-Turingmaschinen, wenn es die Lösung erleichtert.

(Haus-)Aufgabe 6.6 *(Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit)*

(a) Zeigen Sie, dass eine Menge genau dann semi-entscheidbar ist, wenn es eine Turingmaschine gibt, die die Elemente dieser Menge in beliebiger Reihenfolge auflistet.

(b) Zeigen Sie, dass eine Menge genau dann entscheidbar ist, wenn es eine Turingmaschine gibt, die die Elemente dieser Menge in einer kanonischen (beispielsweise lexikographischen) Ordnung auflistet.

(Haus-)Aufgabe 6.7 *(Universalität)*

Sei U die universelle Turingmaschine, die bei Eingabe von $\langle i, n\rangle$ die Turingmaschine M_i auf der Eingabe n simuliert. Zeigen Sie, dass es für jede beliebige Turingmaschine M eine Eingabe x gibt, für die U sich genauso verhält wie M (also den gleichen Wert wie M berechnet, bzw. nicht anhält, falls M nicht anhält).

Hinweis: Betrachten Sie eine Turingmaschine M', die sich bei Eingabe von y genauso verhält wie M bei Eingabe von $\langle y, y\rangle$.

Zur Erinnerung...
In diesem Semester ist die Bearbeitung der Übungen fakultativ. Zur Selbstkontrolle ist es jedoch sinnvoll, die von Ihnen bearbeiteten Übungen korrigieren zu lassen (in diesem Fall gilt der Abgabetermin).

Und ganz wichtig:
Falls Sie Schwierigkeiten haben, sprechen Sie uns an! Auch wenn es etwas Überwindung kostet, Fragen hilft!