Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Nuria Brede

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2009

Übungsblatt 8 (Version 2) — Abgabetermin: Dienstag, 23.06.09, 16:00 Uhr

---

Zur Vorbereitung ist es sinnvoll, sich mit folgenden Fragen auseinanderzusetzen:

- Was versteht man unter dem asymptotischen Wachstum einer einer Funktion f? Wie sind die Mengen $\mathcal{O}(f)$, $\Theta(f)$ und $\Omega(f)$ definiert?
- Wie analysiert man die Laufzeit eines Algorithmus?
- Wie ist die Komplexität der in der Vorlesung vorgestellten Sortierverfahren?
- Wie findet man untere Schranken für die Komplexität von Problemen?
- *Praktischer Hinweis:* Wiederholen Sie die Rechenregeln für Logarithmen!

Kurzquiz 8

(1)	Es ist nicht entscheidbar, ob die Sprache einer kontextfreien Grammatik deterministisch ist oder nicht.	**ja**	**nein**
(2)	Die Zeitkomplexität einer bestimmten Maschine ergibt sich aus ihrer durchschnittlichen Rechenzeit im Verhältnis zur Länge der Eingabe.	**ja**	**nein**
(3)	Seien g und f Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^+$. Dann gilt $(g \in \Theta(f)) \Leftrightarrow (g \in \mathcal{O}(f) \wedge g \in \Omega(f))$.	**ja**	**nein**
(4)	Die Rechenzeit für die Suche nach einem bestimmten Element in einer unsortierten Liste mit Länge n liegt in $\Theta(n)$.	**ja**	**nein**
(5)	Es ist theoretisch möglich, Listen von Zahlen in linearer Zeit zu sortieren.	**ja**	**nein**

Aufgabe 8.1 *(Problemreduktion bei entscheidbaren Mengen)*

Sei Σ ein Alphabet und P die Menge der entscheidbaren Mengen über Σ. Seien M_1 und M_2 beliebige Mengen aus $P \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$. Zeigen Sie, dass $M_1 \leq M_2$ gilt.

Aufgabe 8.2 *(Wachstumsordnungen von Funktionen - konkret)*

Stellen Sie für die folgenden Paare von Funktionen fest, ob $f \in \mathcal{O}(g)$, $f \in \Omega(g)$ und $f \in \Theta(g)$ gilt. Begründen Sie ihre Aussage und geben Sie die entsprechenden Konstanten aus der Definition von $\mathcal{O}$, Ω und Θ an.

(a) $f(n) = \sqrt{n}$ und $g(n) = 111n$

(b) $f(n) = \log_{10} n$ und $g(n) = \log_2 n$

(c) $f(n) = \sqrt[4]{n}$ und $g(n) = \sqrt{n}$

(d) $f(n) = n^3$ und $g(n) = n \log_2 n$

(e) $f(n) = 132n^2 + 42n + 31$ und $g(n) = n^2$

(f) $f(n) = n \log_2 n + \sqrt{n}$ und $g(n) = n$

Aufgabe 8.3 *(Wachstumsordnungen von Funktionen - allgemein)*

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\forall a, b > 1. \log_a n \in \Theta(\log_b n)$

(b) $f \notin \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow (f \in \Omega(g) \wedge f \notin \Theta(g))$

Aufgabe 8.4 *(Wachstumsverhalten von Funktionen)*

Zeigen Sie, dass die Funktionen $n!$, n^n und 2^{2^n} schneller als jede Exponentialfunktion wachsen. Ordnen Sie die Funktionen nach ihrem Wachstumsverhalten.

(Haus-)Aufgabe 8.5 *(Problemreduktion - PKP)*

Sei Σ ein Alphabet und $M'PKP$ die folgende Variante des allgemeinen PKP:

$M'PKP = \{((u_1, v_1), \ldots (u_k, v_k), w) \mid u_i, v_i, w \in \Sigma^+ \wedge \exists i_1, \ldots, i_n. w u_{i_1} \ldots u_{i_n} = v_{i_1} \ldots v_{i_n}\}$.

Zeigen Sie, dass $PKP \leq M'PKP \leq MPKP$ gilt.

(Haus-)Aufgabe 8.6 *(Wachstumsordnungen von Funktionen)*

(a) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ gegeben durch $f(n) = \sum_{i=1}^{n^3} i^4 (\log_i)^2$. Schätzen Sie die Funktion f ab und geben Sie ihre Wachstumsklasse $\mathcal{O}(f)$ in ihrer einfachsten Form an.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $2^{\sqrt{n}}$ und $n^{\log n}$ schneller als jedes Polynom wachsen, aber langsamer als jede Exponentialfunktion. Welche der beiden Funktionen wächst schneller?

(Haus-)Aufgabe 8.7 *(Wachstumsordnungen von Funktionen)*

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten.

(a) Sei $max(f, g)(n) = max\{f(n), g(n)\}$. Dann gilt $max(f, g) \in \Theta(f + g)$.

(b) Sei $f(n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $f * g \in \mathcal{O}(f) \Leftrightarrow g \in \mathcal{O}(1)$

!!Nicht vergessen!! – Hörsaaländerung am 19.06.2009

Am 19.06. findet die Vorlesung um 8.30 Uhr in Haus 1, HS10 (Raum 2.15, über der Mensa!) statt.

Ebenfalls am 19.06.2009: Sommerfest der Informatik / Hochschulinformationstag

Auf dem **Hochsuchulinformationstag** stellen sich die Studiengänge vor und bieten Studieninteressierten die Möglichkeit einen Eindruck von der Uni zu bekommen. Die Vorstellungsvorlesungen sind den Tag über in Haus 6 in Griebnitzsee.

Besonders interessant für Informatik-Studenten ist dabei der **Vortrag von Prof. Dr. Helmut Jürgensen** (Universität Potsdam, University of Western Ontario): **„Schwellen überwinden - Computer für Blinde“** (16.00Uhr, Raum 03.06.01).

Am späten Nachmittag lädt die Fachschaft des IfI zum **Instituts-Sommerfest** neben Haus 4 ein.

Zur Erinnerung...

In diesem Semester ist die Bearbeitung der Übungen fakultativ. Zur Selbstkontrolle ist es jedoch sinnvoll, die von Ihnen bearbeiteten Übungen korrigieren zu lassen (in diesem Fall gilt der Abgabetermin).

Und ganz wichtig:

Falls Sie Schwierigkeiten haben, sprechen Sie uns an! Auch wenn es etwas Überwindung kostet, Fragen hilft!