Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Nuria Brede
Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2009

Übungsblatt 10 (Version 2) — Abgabetermin: Dienstag, 07.07.09, 16:00 Uhr

---

Zur Vorbereitung ist es sinnvoll, sich mit folgenden Fragen auseinanderzusetzen:

- Was bedeuten die Begriffe $\mathcal{NP}$-hart und $\mathcal{NPC}$? Was besagt der Satz von Cook?
- Was vesteht man unter der polynomiellen Reduzierbarkeit eines Problems auf ein anderes?
- Welche $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme wurden in der Vorlesung behandelt? Wie sind diese genau definiert?
- Mit welcher Methodik lässt sich die $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit eines Problems nachweisen? Welche Einzelschritte sind dazu notwendig?

Kurzquiz 10

(1)	Jedes $\mathcal{NP}$-harte Problem ist $\mathcal{NP}$-vollständig.	**ja**	**nein**
(2)	Der Satz von Cook besagt, dass kein Problem in $\mathcal{NP}$ schwieriger als *SAT* ist.	**ja**	**nein**
(3)	$\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ gilt genau dann, wenn bewiesen werden kann, dass ein Problem aus $\mathcal{NP}$ auch in $\mathcal{P}$ liegt.	**ja**	**nein**
(4)	Das *SAT*-Problem betrifft die Frage, ob eine aussagenlogische Formel in *KNF* allgemeingültig ist.	**ja**	**nein**
(5)	Eine deterministische Lösung von *SAT* benötigt exponentiellen Zeitaufwand.	**ja**	**nein**

Aufgabe 10.1 *(Vollständigkeit)*

Definition: Sei L eine Sprache in $\mathcal{P}$. Dann heisst L genau dann $\mathcal{P}$-*vollständig*, wenn für jede beliebige Sprache L' aus $\mathcal{P}$ gilt $L' \leq_p L$.

Zeigen Sie, dass folgende Aussage gilt: Falls es eine Sprache L gibt, die sowohl $\mathcal{P}$-vollständig als auch $\mathcal{NP}$-vollständig ist, so gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Aufgabe 10.2 *(Erfüllbarkeit)*

(a) Sind die folgenden Formeln erfüllbar? Geben sie ggf. eine erfüllende Belegung der Variablen an.
$F_1 = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \vee \overline{x_2}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3)$
$F_2 = (x_1 \vee x_3) \wedge (x_3 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_1 \vee x_2)$

(b) Sei $F_3(x_1, x_2, x_3) = K_1 \wedge K_2$, wobei Klausel $K_i = (z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3})$ und $z_{ij} \in \{x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, x_3, \overline{x_3}\}$ und $F_4(x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2) = (z_{11} \vee z_{12} \vee y_1) \wedge (\overline{y_1} \vee z_{13} \vee y_0) \wedge (z_{21} \vee z_{22} \vee y_2) \wedge (\overline{y_2} \vee z_{23} \vee y_0)$

Zeigen Sie, dass es eine erfüllende Belegung für F_3 genau dann gibt, wenn F_4 so erfüllbar ist, dass in keiner Klausel ausschliesslich wahre Literale vorkommen ("*not-all-equal*").

Hinweis: Wenn eine not-all-equal Variablenbelegung $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_0, y_1, y_2, y_3)$ die Formel F_4 erfüllt, dann wird F_4 auch von $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}, \overline{y_0}, \overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3})$ erfüllt.

Aufgabe 10.3 *($\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)*

Das Erfüllbarkeits-Problem *NAE-SAT* (*"not-all-equal"*) ist ein Spezialfall von *3SAT*: Hat eine aussagenlogische Formel in *KNF* mit je 3 Literalen pro Klausel eine erfüllende Belegung, so dass in jeder Klausel mindestens ein Literal mit "falsch" belegt wird?

(a) Betrachten Sie die Beweismethodik für $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit auf Folie 1 in Einheit 6.3. Stellen Sie auf dieser Grundlage einen Plan auf, wie Sie *NAE-SAT* $\in \mathcal{NPC}$ beweisen können.

(b) Leiten Sie aus der in Aufgabe 10.1b betrachteten Äquivalenz ein allgemeines Verfahren ab, um aus einer Formel $F(x_1, \ldots, x_n) \in 3SAT$ eine Formel $G(x_1, \ldots, x_m) \in$ *NAE-SAT* zu konstruieren.

(c) Zeigen Sie, dass *NAE-SAT* $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

(Haus-)Aufgabe 10.4 *(Polynomialzeit-Reduktion und $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)*

(a) Zeigen Sie, dass die Relation $\leq_p$ reflexiv und transitiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $L \in \mathcal{NP}$ mit $L \notin \mathcal{NPC}$ gilt $\exists L' \in \mathcal{NP}. L \leq_p L' \wedge \neg(L' \leq_p L)$.

(Haus-)Aufgabe 10.5 *(Erfüllbarkeit)*

Sei F eine aussagenlogische Formel in *KNF* mit genau 2 Literalen pro Klausel. Sei $G(F)$ ein gerichteter Graph, dessen Knotenmenge aus den Variablen von F sowie ihren Negationen besteht. In G gibt es jeweils genau dann Kanten (x_1, x_2) und $(\overline{x_2}, \overline{x_1})$, wenn es in F eine eine Klausel $\overline{x_1} \vee x_2$ gibt (damit entsprechen die Kanten einer Implikation und der Graph ist in dem Sinne symmetrisch, dass er eine Kante (x_1, x_2) enthält, wenn er auch eine Kante $(\overline{x_2}, \overline{x_1})$ enthält).

Betrachten Sie zur Veranschaulichung die Graphen $G(F_1)$ und $G(F_2)$ der Formeln aus Aufgabe (10a).

(a) Zeigen Sie: Eine aussagenlogische Formel F in *KNF* mit genau 2 Literalen pro Klausel ist genau dann unerfüllbar, wenn es in F eine Variable x gibt, so dass in $G(F)$ Pfade von x nach $\overline{x}$ sowie von $\overline{x}$ nach x führen.

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst Folgendes: Wenn in $G(F)$ für keine Variable x sowohl ein Pfad von x nach $\overline{x}$ sowie von $\overline{x}$ nach x existiert, können Sie immer eine erfüllende Variablenbelegung für F konstruieren. Beginnen Sie, indem Sie eine Variable y mit "wahr" belegen, von der kein Pfad zu $\overline{y}$ führt. Durchlaufen Sie dann entlang der von diesem Knoten erreichbaren Knoten den Graphen.

(b) Das Problem *2SAT* ist die Einschränkung des *SAT*-Problems auf Formeln in *KNF* mit genau 2 Literalen pro Klausel (wie in Aufgabenteil (a)). Zeigen Sie: Falls *2SAT* $\in \mathcal{NPC}$, dann gilt $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

(Haus-)Aufgabe 10.6 *(Alternative Charakterisierung der Klasse $\mathcal{NP}$)*

Definition: Sei Σ ein Alphabet. Eine Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ heisst *polynomiell entscheidbar*, wenn es eine determinitische Turingmaschine gibt, die die Sprache $L_R = \{(x, y) \mid R(x, y) \text{ gilt}\}$ in polynomieller Zeit entscheidet. Des weiteren heisst R *polynomiell balanciert*, wenn für alle $(x, y) \in R$ gilt, dass $|y| \leq |x|^k$ für ein $k \leq 1$.

Zeigen Sie: Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Es gilt $L \in \mathcal{NP}$ genau dann, wenn es eine polynomiell entscheidbare und polynomiell balancierte Relation R gibt, so dass $L = \{x \mid \exists y.(x, y) \in R\}$.

Zur Erinnerung...

In diesem Semester ist die Bearbeitung der Übungen fakultativ. Zur Selbstkontrolle ist es jedoch sinnvoll, die von Ihnen bearbeiteten Übungen korrigieren zu lassen (in diesem Fall gilt der Abgabetermin).

Probeklausur:

Im Verlauf der nächsten Woche gibt es auf der Veranstaltungs-Homepage eine Probe-Klausur zum Herunterladen. Nutzen Sie diese Chance, um Ihren Kenntnisstand *sinnvoll* zu überprüfen, indem Sie sich bereits *vorher* eine DINA4-Seite mit Notizen zusammenstellen, wie sie auch in der Abschluss-Klausur zugelassen sein wird. Versuchen Sie dann, die Probe-Klausur unter realistischen Umständen (alleine, mit Zeitlimit, ein Blatt mit Notizen, keine weiteren Unterlagen) zu bearbeiten.

Und ganz wichtig:

Falls Sie Schwierigkeiten haben, sprechen Sie uns an! Auch wenn es etwas Überwindung kostet, Fragen hilft!