Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Nuria Brede

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2009

Übungsblatt 11 (Version 1) — Abgabetermin: Dienstag, 14.07.09, 16:00 Uhr

---

Zur Vorbereitung ist es sinnvoll, sich mit folgenden Fragen auseinanderzusetzen:

- Mit welcher Methodik lässt sich die $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit eines Problems nachweisen? Welche Einzelschritte sind dazu notwendig?
- Welche $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme wurden in der Vorlesung behandelt? Wie sind diese genau definiert? Wie wurde ihre $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit im Detail nachgewiesen?
- *Praktischer Hinweis:* Wiederholen Sie Grundlagen der klassischen Aussagenlogik (Normalformen, De Morgan'sche Regeln . . .) und Graphentheorie!

Kurzquiz 11

(1)	Das Graph-Coloring-Problem *GC* betrifft die Frage, ob es möglich ist, jeden Graphen mit k Farben so einzufärben, dass verbundene Knoten je unterschiedliche Farben haben.	**ja**	**nein**
(2)	*TSP* sei das Travelling-Salesman-Problem und *DHC* das Directed-Hamilton-Circuit-Problem. Dann gilt die Beziehung *DHC* $\leq_p$ *TSP*.	**ja**	**nein**
(3)	Aus *3SAT* $\leq_p$ *GC* folgt, dass *GC* $\mathcal{NP}$-hart ist.	**ja**	**nein**
(4)	DHC betrifft die Suche nach einem Hamilton'schen Kreis in einem gerichteten Graphen und ist $\mathcal{NP}$-vollständig. Angenommen der fragliche Graph wäre ungerichtet, dann läge das Problem in $\mathcal{P}$.	**ja**	**nein**
(5)	Aus *CLIQUE* $\leq_p$ *VC* folgt, dass VC in $\mathcal{NP}$ liegt.	**ja**	**nein**

Aufgabe 11.1 *(Instanzen $\mathcal{NP}$-vollständiger Probleme)*

Sei $F = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_4) \wedge (x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_1) \wedge (\overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4)$. Wenden Sie die in den genannten Problem-Reduktionen benutzten Transformationsfunktionen auf F an.

(a) *3-SAT* $\leq_p$ *CLIQUE* $\leq_p$ *VC*

(b) *3-SAT* $\leq_p$ *DHC* $\leq_p$ *HC*

Aufgabe 11.2 *($\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)*

Das Problem *CCOVER* ("*Clique-Cover*") betrifft die Frage, ob die Knotenmenge eines Graphen G sich als Vereinigung von k oder weniger Cliquen in G zusammensetzen lässt.

CCOVER$= \{(G,k) \mid G = (V,E)$ Graph $\wedge\, k \in \mathbb{N} \wedge (\exists n \leq k. V = V_1 \cup \cdots \cup V_n \wedge \forall i \leq n. V_i$ Clique in G$)\}$

Zeigen Sie, dass *CCOVER* $\mathcal{NP}$-vollständig ist und benutzen Sie als Reduktion *GC* $\leq_p$ *CCOVER*.

Aufgabe 11.3 *(Erfüllbarkeit, Allgemeingültigkeit)*

Definition: Eine aussagenlogische Formel heisst *allgemeingültig*, wenn sie unter jeder möglichen Belegung der in ihr vorkommenden Variablen erfüllt ist.

(a) Betrachten Sie die Formeln
$F = (x_1 \wedge x_2) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3) \vee \overline{x_3}$ und $G = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_2} \wedge x_3)$.
$\overline{F}$ und $\overline{G}$ seien die Negationen dieser Formeln. Welche der Formeln F, $\overline{F}$, G und $\overline{G}$ ist/sind erfüllbar, welche sogar allgemeingültig?

(b) Welcher Zusammenhang scheint zwischen der Erfüllbarkeit/Allgemeingültigkeit einer aussagenlogischen Formel und Ihrer Negation zu bestehen? Begründen Sie ihre Vermutung anhand von Formeln in disjunktiver oder konjunktiver Normalform.

(Haus-)Aufgabe 11.4 *(Polynomielle Reduktionsrelation)*

Seien L_1,L_2 und L_3 Sprachen. Folgendes sei über diese Sprachen bekannt:

- L_1 liegt in der Klasse $\mathcal{NP}$ und L_2 ist $\mathcal{NP}$-hart.
- Es gelten die Aussagen $L_1 \leq_p L_3$, $L_2 \leq_p L_1$ und $L_1 \leq_p L_2$.

(a) Welche der drei Sprachen besitzen die Eigenschaften "liegt in $\mathcal{NP}$", "liegt in $\mathcal{NPC}$" und "ist $\mathcal{NP}$-hart", welche nicht? Lassen sich bei jeder Sprache bezüglich jeder der genannten Eigenschaften Aussagen treffen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Können wir auch $L_3 \leq_p L_1$, $L_2 \leq_p L_3$ und/oder $L_3 \leq_p L_2$ folgern?

(Haus-)Aufgabe 11.5 *($\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)*

Sei $k > 3$ eine beliebige, aber fest gewählte natürliche Zahl. Dann betrifft das *k-SAT*-Problem die Erfüllbarkeit einer aussagenlogischen Formel in konjunktiver Normalform mit k Literalen pro Klausel.

$$\textit{k-SAT} = \{c_1, \ldots, c_m \mid (\forall i \leq m. c_i = z_{i1} \vee \cdots \vee z_{ik} \text{ mit } (\forall j \leq k. z_{ij} \in \{x_1, \overline{x_1}, \ldots, x_n, \overline{x_n}\})) \\ \wedge (\exists a_1, \ldots, a_n \in \{0,1\}. \forall l \leq m. a_1, \ldots, a_n \text{ erfüllt } c_l)\}$$

Zeigen Sie, dass gilt *k-SAT* $\in \mathcal{NPC}$.

(Haus-)Aufgabe 11.6 *($\mathcal{NP}$-vollständige Probleme)*

Suchen Sie den unter [1] zitierten Artikel (leicht online zu finden) und beschreiben Sie die darin für die Reduktion *SAT* $\leq_p$ *CLIQUE* verwendete Transformation. Illustrieren Sie die Transformation anhand eines Beispiels.

Hintergrund: Bei [1] handelt es sich um ein grundlegendes Paper, in dem Richard Karp 1972 Stephen Cooks Konzept der NP-Vollständigkeit aufgriff. Er bewies darin die $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit von 21 als "nicht handhabbar" bekannten Probleme aus Kombinatorik und Graphentheorie.

Und nicht zu vergessen: Um erfolgreich zu studieren, kann es (wenig ;-)) überraschenderweise sehr nützlich sein, bei bestimmten Themen auf weiterführende Literatur zurückzugreifen und sich das darin enthaltene Wissen selbständig zu erarbeiten.

Literatur

[1] Richard M. Karp. Reducibility Among Combinatorial Problems. in R. E. Miller and J. W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, New York: Plenum. pp. 85–103, 1972.