Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Nuria Brede
Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2009

Übungsblatt 13 (Version 1) — Abgabetermin: –

Zur Vorbereitung ist es sinnvoll, sich mit folgenden Fragen auseinanderzusetzen:

- **Achtung:** *In der Klausur können auch Fragestellungen zu den Themen der Einheit 6.5 vorkommen!!!*
- Was versteht man unter der Pseudopolynomialität eines Problems? Was sind Zahlprobleme? Welche der in der Vorlesung vorgestellten Probleme sind Zahlprobleme?
- Wie sind die Komplexitätsklassen $co-\mathcal{NP}$ und $PSPACE$ definiert? Welche weiteren Komplexitätsklassen gibt es? Wie sieht die Hierarchie dieser Komplezitätsklasen aus?
- Wie zeigt man $PSPACE$-Vollständigkeit? Welche Beispiele $PSPACE$-Vollständiger Probleme wurden in der Vorlesung behandelt?
- *Des weiteren:* **Wiederholung** der Themen der Theoretischen Informatik II.
  Bereiten Sie Ihr DINA4-Blatt, das Sie in der Klausur als Hilfe benutzen dürfen, **selbst** vor!!!

Kurzquiz 13

(1) Jedes Zahlproblem hat eine pseudopolynomielle Lösung. **ja** **nein**

(2) Angenommen, es gilt $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$. Dann ist die Komplexitätsklasse $\mathcal{NP}$ unter Komplementbildung abgeschlossen. **ja** **nein**

(3) Sei $\mathcal{K}$ eine Komplexitätsklasse. Dann enthält die Klasse co-$\mathcal{K}$ die Komplemente der Probleme, die in $\mathcal{K}$ liegen. **ja** **nein**

(4) Wenn es ein $\mathcal{NP}$-vollständiges Problem gibt, das auch in $co-\mathcal{NP}$ liegt, dann gilt $co-\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$. **ja** **nein**

(5) Kein Problem in $PSPACE$ ist schwieriger als das Problem, ob eine geschlossene quantifizierte Boolesche Formel allgemeingültig ist. **ja** **nein**

Aufgabe 13.1 *(Rekursion)*

Zeigen Sie für die folgenden Funktionen, daß sie primitiv-rekursiv, bzw. μ-rekursiv sind!

(a) $f_\leq : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit: $f_\leq(m,n) = \begin{cases} 1 \text{ falls } m \leq n \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$

(b) $f_{kgV} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wobei $f_{kgV}(m,n)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von m und n ist.

(c) $f_{even} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit: $f_{even}(n) = \begin{cases} 1 \text{ falls } n \text{ gerade} \\ \perp \text{ sonst} \end{cases}$

Aufgabe 13.2 *(λ-Kalkül)*

(a) Geben Sie einen λ-Term add_3 für die Funktion $f(x, y, z) = x + z + y$ an und berechnen Sie durch β-Reduktion $\mathsf{add}_3\ \bar{1}\ \bar{1}\ \bar{1}$.

(b) $\mathsf{not} \equiv \lambda \mathsf{p}.\lambda \mathsf{a}.\lambda \mathsf{b}.\mathsf{p\ b\ a}$, $\mathsf{true} \equiv \lambda \mathsf{x}.\lambda \mathsf{y}.\mathsf{x}$ und $\mathsf{false} \equiv \lambda \mathsf{x}.\lambda \mathsf{y}.\mathsf{y}$. Zeigen Sie, dass $(\mathsf{not\ true}) \xrightarrow{*} \mathsf{false}$.

Aufgabe 13.3 *(Funktionale Reduzierbarkeit)*

Sei P eine nicht entscheidbare Menge.

(a) Angenommen, es gilt $P \leq P'$. Können Sie daraus etwas über die Entscheidbarkeit von P' folgern?

(b) Angenommen, es gilt $P' \leq P''$ und $P'' \leq P$. Können Sie daraus etwas über die Entscheidbarkeit von P' folgern?

(c) Was wissen Sie über Entscheidbarkeit und Aufzählbarkeit der Komplementmenge $\overline{P}$ von P?

Aufgabe 13.4 *(Entscheidbarkeit, Aufzählbarkeit)*

Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) $M_a = \{i \mid \varphi_i(i) \text{ ist eine gerade Zahl}\}$ ist nicht entscheidbar.

(b) $M_b = \{\langle i, j\rangle \mid \varphi_{i+2}(j) \text{ ist definiert}\}$ ist aufzählbar.

(c) $M_c = \{i \mid \varphi_i(55) = \bot\}$ ist nicht aufzählbar.

Aufgabe 13.5 *(Diagonalisierung)*

Zeigen Sie mit Hilfe von Diagonalisierung, dass die folgende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nicht berechenbar ist:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_n(n) = \bot \\ \bot & \text{falls } \varphi_n(n) \neq \bot \end{cases} .$$

Aufgabe 13.6 *(Wachstumsordnungen von Funktionen)*

(a) Stellen Sie für die folgenden Paare von Funktionen fest, ob $f \in \mathcal{O}(g)$, $f \in \Omega(g)$ und $f \in \Theta(g)$ gilt.

   (i) $f(n) = n!$ und $g(n) = 99n^6$

   (ii) $f(n) = \log_7 n$ und $g(n) = \log_2 n$

   (iii) $f(n) = \sqrt{n}$ und $g(n) = \log_2 n$

(b) Geben Sie die Wachstumsklasse der folgenden Funktionen in $\mathcal{O}$-Notation an.

   (i) $f(n) = n^2 * \log_2 n + 3n + n^5 + e^n$

   (ii) $f(n) = \sqrt{5n} + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} 2i$

Liest jemand Hinweise?

Auch wenn es nervt: Steht irgendwo ein zusätzlicher Textabschnitt, enthält dieser meist *wichtige Informationen* oder soll Ihnen *helfen*!! Bitte denken Sie daran vor allem in der Klausur.

Es gilt immer noch und vor der Klausur sogar mehr denn je:

Falls Sie Schwierigkeiten haben, sprechen Sie uns *rechtzeitig* an! Eine geöffnete Bürotür heisst, dass jemand da ist und sich wenn irgend möglich auch Zeit nimmt.