Tutorium 09-05-20

Notiztitel 5/6/2009

$\underbrace{\text{TM, } \mu\text{-rek, } \lambda\text{-Kalkül, Logik}}$

$\downarrow$

$\boxed{\text{Berechenbarkeitstheorie}}$

- Minimierung (μ) vs. beschränkte Suche (μ_g) $\boxed{3.5b}$
- λ-Kalkül durchrechnen exp
- n-te Primzahl (ÜB 3.4)

<u>Übung 3.5</u>

R p.r. $\Leftarrow$ $\chi_R(x_1 \dots x_n) = \begin{cases} 1 & R(x_1 \dots x_n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

p.r.

S μ-rek $\iff$ $S(x_1 \dots x_n) \iff (\exists y)\, R(x_1 \dots x_n, y)$

für ein p.r. Relation R

R p.r $\Rightarrow$ $R_\exists(x_1 \ldots x_n, u) \Leftrightarrow (\exists v < u)\ R(x_1, \ldots x_n, v)$

ist p.r

Minimierung μ vs beschränkte Minimierung

$$\mu_g[f](x_1 \ldots x_n) = \begin{cases} \min\{v \le \overbrace{g(x_1 \ldots x_n)}^{u} \mid f(x_1 \ldots x_n, v) = 0\} \\ \underbrace{g(x_1 \ldots x_n)+1}_{u} & \text{falls } \nexists \end{cases}$$

$$\mu[f](x_1 \ldots x_n) = \begin{cases} \min\{v \mid f(x_1 \ldots x_n, v) = 0\} & \text{falls } \exists \text{ und } \cancel{f \text{ für } i < v \text{ definiert}} \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige:

$$\chi_{R_\exists}(x_1 \ldots x_n, u) = \begin{cases} 1 & (\exists v < u)\ \chi_R(x_1 \ldots x_n, v) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\min\{v < u \mid \chi_R(x_1 \dots x_n, v) = 1\} < u$

$\min\{ \underline{\qquad\qquad\qquad} \} = u$

Limitfunktion für Minimierung ist $g = C^{n+1}_{u+1}$

$\chi_{R_\exists}(\quad) = 1 \iff Mn_g[f] \not< u$

$f(x_1 \dots x_n, v) = 1 - \chi_R(x_1 \dots x_n, v)$

damit ist $\chi_{R_\exists}$ p.r.

Im Detail: Einheit 5.2, F8

$\chi_{R_\exists} = f_< \circ (Mn_g[f], C^{n+1}_u)$

$= f_< \circ (Mn_{C^{n+1}_{u-1}}[sub \circ (C^{n+1}_1, \chi_R)], C^{n+1}_u)$

3.4 $f_{pr}(n)$ = die n-te Primzahl

Wir haben f_{prim} mit $f_{prim}(n) = \begin{cases} 1 & n \text{ Primzahl} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

p.r.

Eine Sache muß man nachschlagen

$$\underbrace{f_{pr}(n) < f_{pr}(n+1) \leq f_{pr}(n)! + 1}_{\text{p.r. Rekursion}}$$

$f_{pr}(0) = 2$

$f_{pr}(n+1) = \min \{ y \leq f_{pr}(n)! + 1 \mid f_{pr}(n) < y \wedge f_{prim}(y) = 1 \}$

$\wedge \; 1 - (f_{<}(f_{pr}(n), y) * f_{prim}(y)) = 0$

damit ist f_{pr} durch prim. Rek und pr Funktionen definiert

Programm $\quad Pr\left[C^0_2 ,\ Mn_{s \circ f_{alle} \circ pr^2_2} \left[sub \circ \left[C^3_1 ,\ mul \circ \left(f_< \circ (pr^3_2 , pr^3_3) \right) ,\ f_{prim} \circ pr^3_3 \right) \right] \right]$

Indizes

$f_{pr} : N \to N \quad \equiv Pr[g, f']$

Nullstellig

zweistellig

$f_{pr}(0) = g()$

$f_{pr}(n+1) = f'(n, f_{pr}(n))$

$Mn_g[f](n, f_{pr}(n))$

dreistellig

$(n, f_{pr}(n), y)$

zweistellig

$m + n$ = m mal eins addieren auf n

λ-Kalkül: $\text{add}\ \bar{2}\ \bar{4}$ ~~ausrechnen~~ erwarte $\bar{6}$

nachschlagen

$$\text{add} \equiv \lambda m.\ \lambda n\ \lambda f\ \lambda x.\ m\ f\ (n\ f\ x)$$

$$\bar{2} = \lambda f.\ \lambda x.\ f\ (f\ (x))$$

$$\bar{4} = \lambda f.\ \lambda x.\ f(f(f(f\ (x))))$$

$$(\cancel{\lambda m}.\ \lambda n.\ \lambda f.\ \lambda x.\ \overset{\bar{2}}{\cancel{m}}\ f\ (n\ f\ x))\ \bar{2}\ \bar{4}$$

$$\rightarrow (\cancel{\lambda n}\ \lambda f\ \lambda x\ \bar{2}\ f\ (\overset{\bar{4}}{\cancel{n}}\ f\ x))\ \bar{4}$$

$$\rightarrow \lambda f.\ \lambda x\ \bar{2}\ f\ (\bar{4}\ f\ x)$$

$$= \lambda f_1.\ \lambda x\ (\lambda f.\ \lambda x.\ f_2(f_2\ x))\ f_1\ (\bar{4}\ f_1\ x)$$

$$\overset{2}{\rightarrow} \lambda f.\ \lambda x\ f\ (f\ (\bar{4}\ f\ x))$$

$$= \lambda f.\lambda x \; f(f((\cancel{\lambda f}.\cancel{\lambda x}.\; f(f(f(f(x))))) \; \cancel{f} \; \cancel{x})))$$

$$\xrightarrow{2} \lambda f.\lambda x \; f(f(f(f(f(f\; x))))))$$

$$= \overline{6}$$

$$\lambda m \; \lambda n \; \lambda f \; \lambda x. \; m \; (n \; f) \; x$$

m mal n-addieren

$$\lambda m.\lambda n \; \lambda f \; \lambda x \; ((m \; n) \; f) \; x \qquad n^m$$

Rekursionskombinator anwenden

$$R t = t(R t)$$

$$(\lambda f.\lambda x.x) \; ((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle^{(2)} : N^2 \to N$$

$$\langle x_1, x_2, x_3 \rangle^3 = \langle x_1, \langle x_2, x_3 \rangle\rangle : N^3 \to N$$

$$\langle x_1 .. x_n \rangle^n = \langle x_1 \langle x_2 \langle .. x_n \rangle\rangle\rangle : N^n \to N$$

$$\langle x_1 .. x_k \rangle^* = \langle k, \langle x_1 .. x_k \rangle^k \rangle : N^* \to N$$

tupel (k,

$$A_0 \quad) = 1$$

$$= \cancel{2}$$

$$A_n(0) = 1 \qquad w\ n\ 0 \to w1$$

$$A_0^n(1) = 2 \qquad w\ 0\ 1 \to w2$$

$$A_0(x+2) = x+4 \qquad w\ 0\ (x+2) \to w\ x+4$$

$$A_{n+1}(x+1) = A_n(A_{n+1}(x)) \qquad w(n+1)(x+1) \to w\ n\ (n+1)\ x$$

Folien müssen rechts auch ⟨ ⟩ haben! !