Tutorium 09-05-27

Notiztitel 5/6/2009

Modelle : TM μ-rek. Fn, λ-Kalkül } Church'sche These
Repräsentierbarkeit

Berechenbarkeit "abstrahiert"

Ü 5.2. : Beweis der Min-"Funktion"

– $s = \lambda n \lambda f. \lambda x. \; n \, f \, (f \, x)$ warum

5.1(b) Fakultätsfunktion wie als λ-ausdruck

Diagonalisierung

5.6 : $2^{a_1} 3^{a_2} 5^{a_3} 7^{a_4}$ $\bar{n} = S(S(\ldots S(0))$

Min

$$MIN(x,y,z) \equiv \text{"} z = \text{minimum von } x \text{ und } y \text{"}$$

$$z \leq x \wedge z \leq y \wedge (z = x \vee z = y)$$

$$MIN(x,y,z) \equiv LE(z,x) \wedge LE(z,y) \wedge (z = x \vee z = y)$$

Zeige für alle $i,j,k \in \mathbb{N}$ gilt

1) $k = \min(i,j) \Rightarrow\ \models_Q MIN(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$

2) $\neq \Rightarrow\ \models_Q \neg MIN(\bar{i},\bar{j},\bar{k})$

1) $k = \min(i,j) \Rightarrow (k = i \vee k = j) \wedge k \leq i \wedge k \leq j$

dann $\models_Q$ $\bar{k} = \bar{i}$ oder $\bar{k} = \bar{j}$

Beweis durch induktion über k

$k = i \Rightarrow \models_Q \bar{k} = \bar{i}$ Text(id identisch) ref

$k = 0$ dann $i = 0$ $\models_Q \bar{0} = \bar{0}$ axiom der $=$ Reflexivität

$k > 0$ $\quad k = s(k')$

und $l = s(\bar{k}')$

$\models \quad s(\bar{k}') = s(k')$ Axiom Q_1

$\models \quad \bar{k}' = \bar{k}'$

per Induktionsannahme

Es reicht das (nicht erwähnte) Axiom $\bar{0} = 0$

Logik enthält generell

<u>Ref</u> $x = x$, <u>Sym</u> $x = y \Rightarrow y = x$

Trans $x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$

<u>Zurück</u> $k = \min(i, j)$

a) $k = i$ dann $\bar{k} = \bar{i}$ also

$\models_Q \boxed{\bar{k} = \bar{i}}$

<u>weiter</u> $k \leq k \wedge k \leq i$

$\models \boxed{LE(\bar{k}, \bar{k})} \equiv \exists z. \bar{k} = \bar{k} + z$

gilt für $z = \bar{0}$

mit Axiom Q_4 $\quad \bar{k} = \bar{k} + \bar{0}$ ✓

$k \leq j \models \boxed{LE(\bar{k}, \bar{j})} \quad \exists z.\ \bar{j} = \bar{k} + z$

wir wissen

$j = k + n \implies \models_Q \bar{j} = \bar{k} + \bar{n}$

Folie 19

wähle $n = j - k \geq 0$

dann $\models_Q \bar{j} = \bar{k} + \overline{(j-k)}$ echte Term

$\models \exists z.\ \bar{j} = \bar{k} + z$

$\uparrow$

$z = \overline{(j-k)}$

damit insgesamt gezeigt

$$\models_Q (\bar{k} = \bar{i} \lor \bar{k} = \bar{j}) \land \underline{LE(\bar{k}, \bar{i})} \land LE(\bar{k}, \bar{j})$$

b) $k = j$ analog, i und j tauschen

2) $k \neq \min(i, j)$ dann a) $k \neq i \land k \neq j$

oder b) $k > i$

oder c) $k > j$

a) $\bar{k} \neq \bar{i} \wedge \bar{k} \neq \bar{j}$

$$\left[\bar{k} = s(\_\ \bar{i}) \vee \bar{i} = s(\_\ \bar{k}) \right] \wedge \left[\bar{k} = s(\_\ \bar{j}) \vee \bar{j} = s(\_\ \bar{k}) \right]$$

mit Axiom Q_1, Q_2

$- \; S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$

$S(x) \neq \bar{O}$

Induktionsbeweis daß $\boxed{\bar{k} \neq \bar{1}}$ ✓

und $\bar{k} \neq \bar{j}$ ✓

F_a $\quad \bar{4} + \bar{5} = \bar{9}$ $\qquad$ $SSSSO + SSSSSO = SSSSSSSSSO$

$SS\ldots \bar{1} = \bar{1} \Rightarrow s^2(s^{1-1}0) = s^{1-1}0$

$s^2(s^1 0) \quad s^1 0 \Rightarrow s^2 0 = 0$

und

mit $2 > 0$ $\quad s(s^{2-1}0) = \bar{O}$ ↯ Q_2

b) $n > i \Rightarrow \models_Q \neg LE(\bar{n}, \bar{i})$

$\neg (n \leq i)$

$\Rightarrow \models_Q \neg LE(\bar{n}, \bar{i})$

$\neg \exists z .\ \bar{i} = \bar{n} + z$

$\forall z .\ \bar{i} \neq \bar{n} + z$

$\models_Q \forall z \quad \bar{i} \neq \bar{n} + z = S^z(n)$

$\models_Q \forall z \quad \bar{i} \neq S^z(S^{k-i}(\bar{i}))$

beweis analog zu oben

Es lohnt sich separat zu zeigen

$i \leq j \iff \models_Q LE(\bar{i}, \bar{j})$

c) analog

Matrix $\quad h(x_1, x_2, .., y)$

$x \quad h \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad .. \quad y$

$\text{sei } h\ x\ y = t$

$\text{auch} \quad \text{sei } h\ x = \lambda y.\ t$

$\text{sei } h\ x = \text{ausdruck}$

$h\ x\ \cancel{y} = \text{ausdruck}\ \cancel{y}$

Fakultätsfunktion

$\text{letrec} \quad x! = \text{falls } x = 0 \text{ dann } 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{sonst } x \cdot (x-1)!$

$\qquad\quad = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot x$

$x! = \text{letrec } fak\ x = \text{if zero } x \text{ then } \bar{1}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{else mul } x\ (fak\ (p\ x))$

$Y\ (\lambda fak\ \lambda x.\ (\text{zero } x)\ \bar{1}\ (\text{mul } x\ (fak\ (p\ x))))$

$\text{if } b \text{ then } s \text{ else } t = b\ s\ t$

Diagonalbeweise:

zu zeigen $u(x,i) = f_i(x)$

wobei f_i = i-te p.r. Funktion

u kann nicht selbst p.r. sein

Wir nehmen an, u wäre primitiv-rekursiv
und definieren eine Funktion $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$g(i) = u(i,i) + 1$$

Dann ist g primitiv rekursiv $\left(g = S \circ u \circ (pr_1^1, pr_1^1)\right)$
also gibt es eine Zahl j mit
$g = f_j$.

Dann folgt für dieses j:

$$g(j) :=_{def} u(j,j) + 1 = f_j(j) + 1 = g(j) + 1$$

Das ist ein Widerspruch. Also kann die Annahme nicht stimmen. ✓

Warum 'Diagonal' beweis?

Trage Funktionen in Tabelle auf. Ändere auf der Diagonale

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	$g = f_j$
0	$f_0(0)+1$					
1		$f_1(1)+1$				
2			$f_2(2)+1$			
3				$f_3(3)+1$		
4						

g

g ist p.r., also taucht g als ein f_j auf

An der Schnittstelle $g(j) = f_j(j)+1 = g(j)+1$
gibt es einen Widerspruch

Der gilt aber nur wegen der Annahme, g wäre p.r. Sonst wäre g <u>nicht</u> p.r., also nicht in Tabelle!