Tutorium 09-06-03

Notiztitel 5/6/2009

4 axiome ⟶ Abschlußeigenschaften
& Zusammenhang
berechenbar, aufzählbar, entscheidbar
semi-entscheidbar

↳ Unlösbarkeitsbeweis

6.3 Auf- vs Ab zählbar
6.4 Diagonalisierung / Selbstreferenz
6.5 Komplement $\overline{L}$
Sprache L $\overline{L} = \mathbb{N} - L$
$= \{x \in \mathbb{N} \mid x \notin L\}$

"semi" Definition
Kann ich entscheiden ob $x \notin L$ ist wenn
L semi-entscheidbar ist

SMN Theorem ≙ Konstruktion

Abzählbar : gleichmächtig wie natürliche Zahle
(oder weniger)
"Größe"

Def : M abzählbar g.d.w es gibt eine
Funktion $f: \mathbb{N} \to M$, die surjektiv ist

Aufzählbar : mit berechenbaren Mitteln durchzählbar

Def $M \subseteq \mathbb{N}$ aufzählbar, g.d.w es gibt eine
berechenbare Funktion $f: \mathbb{N} \to M$, die surjektiv ist

Technisch : es gibt bb. Funktion $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
mit $M = \mathrm{range}(f)$ $(= \mathrm{Bild}(f))$

NICHT : M aufzählbar
$M' \subseteq M$ nicht unbedingt aufzählbar

6.3 alle aufzählbaren Menge abzählbar?

$$\{ M \subseteq \mathbb{N} \mid M \text{ aufzählbar} \}$$
$$= \{ \text{range}(f) \mid f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ berechenbar} \}$$
$$\{ \text{range}(\varphi_i) \mid i \in \mathbb{N} \}$$

└ abzählverfahren!

Verbal: Man kann alle bb Funktionen durchzählen, also auch alle Bildbereiche davon und damit alle aufzählbaren Mengen

- alle abzählbaren Menge aufzählbar?

$$\{ M \mid M \text{ abzählbar} \}$$
$$\supseteq \{ M \subseteq \mathbb{N} \mid M \text{ abzählbar} \}$$
$$= \{ \text{range}(f) \mid f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \}$$

genauso groß wie Menge alle Funktionen auf $\mathbb{N}$
nicht abzählbar

also nicht aufzählbar

Erkenntnisse:

Menge der abzählbaren Menge ist <u>nicht</u> abzählbar
" aufzählbaren Menge <u>ist</u> abzählbar aber nicht aufzählbar

6.4 Diagonal / Selbstreferenz

Aufgabe beschreibt Originalversion von Diagonalbeweise in Logik vor Zeiten der Informatik

Beliebiger Ausdruck $A[x]$ mit Variable x

$$Diag(A) = A["A"]$$

Selbstreferenz: wenn der Text inhaltlich verstanden wird - bezieht es sich auf sich selbst einfachste Form "Dieser Satz ist falsch"

(III) ______

(IV) Tweety liebt die [Diagonalisierung von
$\underbrace{\text{"Tweety liebt die Diagonalisierung von x"}}_{x}$]

XX. XX ist erlaubt in Programmierung
(außer bei typisierten Sprachen)

jeder rekursive Aufruf ist Selbstreferenz

sei $f(x)$ = ______ $f(?)$ ______

Selbstreferenzen in Prog sind unvermeidbar
↳ es gibt interne Widersprüche
zu Entscheidbarkeitsfrage

5.4 $\Theta = (\lambda x.\lambda y.\, y\,(x x y))\ (\lambda x \lambda y.\, y\,(x x y))$

a) $\Theta\, t = (\lambda x.\lambda y.\, y\,(x x y))\ (\quad)\ t$

$$\xrightarrow{2}\ t\,((\lambda x \lambda y.\, y\,(x x y))\,(\lambda x \lambda y.\, y\,(x x y))\, t)$$

$$=\ t\ (\Theta\ t)$$

b) $Y \equiv \lambda f.\,(\lambda x.\, f(x x))(\lambda x.\, f(x x))$

$$Y' = Y\,((\lambda x.\lambda y.\lambda z.\, x\ z\,(y z))\ (\lambda x.x))$$

$$\xrightarrow{2}\ Y\ (\lambda y.\lambda z.\ z\ (y z))$$

$$\to\ (\lambda x.\ (\lambda y.\lambda z.\, z(y z))\ (x x))\ (\quad)$$

$$\to\ (\lambda x\ .\ \lambda z\ .\ z\ (x x z))\ (\lambda x.\lambda z.\ z\ (x x z))$$

$$=\ \lambda x\ .\ \lambda y\ .\ y\ (x x y))\ (\lambda x.\lambda y.\ y\ (x x y))$$

$$=\ \Theta$$

5.5

Neuinterpretation von S, $+$, $*$
auf Elementen jenseits der bekannten Zahlen

Betrachte $\mathbb{N} \cup \{\omega, \Omega\}$ und
interpretiere den Term $\bar{i}$ durch die Zahl i
Dann gibt es keinen Term, der ω oder Ω beschreibt

Wir interpretieren S, $+$, $*$ auf $\mathbb{N} \cup \{\omega, \Omega\}$ wie folgt

S	
$i \in \mathbb{N}$	$i+1$
ω	ω
Ω	Ω

Q_1, Q_2, Q_3 gilt
Q_1^* gilt nicht

$+$	$j \in \mathbb{N}$	ω	Ω
	$i+j$	Ω	ω
	ω	Ω	ω
	Ω	Ω	ω

Q_{34}, Q_5 gilt
Q_2^* – Q_4^* gilt nicht

$*$	0	j	ω	Ω
0	0	0	ω	Ω
$i \in \mathbb{N}^+$	0	$i*j$	ω	Ω
ω	0	Ω	Ω	Ω
Ω	0	ω	ω	ω

Q_6, Q_7 gilt
Q_5^*, Q_6^* nicht