Tutorium ~~09-06-10~~ 17

Notiztitel 5/6/2009

Unentscheidbarkeit

Komplexität O, Ω, Θ -Notation (o)

7.4 $\boxed{S}$ $\boxed{H}$ $f(i) = \langle i, i \rangle$

$\leq \;\equiv\; L_1 = f^{-1}(L_2)$ f total berechenbar

domain $(f) = \mathbb{N}$

range (f) beliebig

$x \in L_1 \rightarrow f(x) \in L_2$
$x \notin L_1 \rightarrow f(x) \in \mathbb{N} \setminus L_2$

wenn L_1 entscheidbar, wähle $x \in L_2$, $y \notin L_2$

$f(i) = \begin{cases} x & i \in L_1 \\ y & \text{sonst} \end{cases}$

- ~~Ab~~ aufzählbar vs semi-entscheidbar Beweis

7.4 Entscheidbar, aufzählbar oder nicht?

$M_1 = \{ i \mid \varphi_i(1) = i \}$ nicht entscheidbar

$u\langle i, 1\rangle = i$?

definiere $f(i) := \begin{cases} 1 & u\langle i,1\rangle = i \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$

berechenbare partielle Funktion
mit $\text{domain}(f) = M_1$

also M_1 semi-entscheidbar / aufzählbar

Was immer geht ist $S \leq M_1$
im Detail schwerer als direkte Diagonalisierung

Annahme M_1 ist entscheidbar $(\{ i \mid \varphi_i(1) = i \})$

definiere $g(i) = \begin{cases} i+1 & i \in M_1 \\ i & \text{sonst} \end{cases}$

dann ist g bb und total $\boxed{g(i) = i + \chi_{M_1}(i)}$

Also gibt es ein j mit $g = \varphi_j$

Was kann man zu $j \in M_1$ sagen?

$j \in M_1 \underset{\text{Def } M_1}{\Longleftrightarrow} \varphi_j(j) = j \underset{g = \varphi_j}{\Longleftrightarrow} g(j) = j \underset{\text{Def } g}{\Longleftrightarrow} j \notin M_1$

$\lightning$ also M_1 nicht entscheidbar

$M_1 \leq S \Rightarrow M_1$ aufzählbar

M_1: leicht

S: schwerer

$i \in M_1 \rightarrow f(i) \in S / M$

$i \notin M_1 \rightarrow f(i) \notin S$

b) $M_2 = \{ i \mid \varphi_{i+6}(i+6) = \perp \}$

wie $\overline{S}$ aber versetzt $\overline{S} = \{ i \mid \varphi_i(i) = \perp \}$

$\overline{S} \leq M_2$

naive Idee $\quad i \in \bar{S} \Leftrightarrow i-6 \in M_2$

was ist mit $i < 6$?

wir wissen, daß M_2 unendlich ist und ein Element $z > 6$ enthält $\quad \varphi_z(x) = \perp$
und ein $y > 6 \notin M_2$ existiert $\quad \varphi_y(x) = x$

Definiere $\quad h(i) = \begin{cases} i-6 & \text{wenn } i \geq 6 \\ z-6 & \text{sonst falls } i < 6 \in \bar{S} \\ y-6 & \text{" } \quad i < \notin S \end{cases}$

dann für $i \geq 6 \quad i \in \bar{S} \Leftrightarrow \varphi_i(i) = \perp$

$\Leftrightarrow \varphi_{i-6+6}(i-6+6) = \perp$

$\Leftrightarrow \varphi_{h(i)+6}(h(i)+6) = \perp$

$\Leftrightarrow h(i) \in M_2$

Die Menge $\{ i < 6 \mid i \in \bar{S} \}$ ist endlich
also entscheidbar, also ist h bb und total

für $i < 6$ ist per Konstruktion
$h(i) \in M_2 \Leftrightarrow i \in \bar{S}$

$M_3 = \{ i \mid \varphi_i$ surjektiv $\}$

extensional

die Menge $P = \{ f \in \mathcal{R} \mid f$ surjektiv $\}$

ist nicht leer, nicht gleich $\mathcal{R}$ — nicht trivial

damit ist

$L_P = \{ i \mid \varphi_i \in P \} = \{ i \mid \varphi_i$ surjektiv $\} = M_3$

nicht entscheidbar

8.2

b) $f(n) = \log_{10}(n) \qquad g(n) = \log_2(n)$

$f \in \Theta(g) = \{ f \mid \exists c, c' > 0, \; c \cdot g \leq_a f \leq_a c' \cdot g \}$

$\lfloor \log_{10}(n) \rfloor = \lfloor \log_2 n \rfloor / \log_2 10$

$f(n) \underset{\geq}{\leq} g(n) \cdot {}^{1}/_{\log_2 10}$

$c, c' = \log_{10} 2$

a) $f(n) = \sqrt{n}$ $g(n) = 111n$

$f(n) \leq g(n)$ für alle n

$g(n) \not\leq f(n)$ " "

$f \in O(g)$ wähle $c = 1/111$

e) $f(n) = 132n^2 + 42n + 31$

$g(n) = n^2$

für $\underline{n \geq 42}$ ist $f(n) \leq 132 \cdot g(n)$

also $f(n) \leq_a \underset{\uparrow c}{133} \cdot g(n)$

für alle n ist $f(n) \geq g(n)$

$c' = 1$

$$f(n) = \begin{cases} e & n \leq 1000 \\ e^n & \text{sonst} \end{cases}$$

$g(n) = n^{20}$

$g(n) \leq f(n)$ fur $n \geq 1000$

$g(n) \not\leq c \cdot f(n)$ fur $n < 1000$

egal wie groß c ist

$f \in O(g) \Leftrightarrow \exists k, c \quad f(n) \leq c \cdot g(n) + k$

fur alle n

$n! \geq 2^n$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \; . \; . \; . \quad n$

$2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2$