Tutorium 09-07-08

Notiztitel 5/6/2009

10.4

a) $\leq_p$ reflexiv & transitiv

$L \leq_p L \iff \exists f.$ polynomiell berechenbar

mit $x \in L \iff f(x) \in L$

wähle $f = id$ ✓

$L_1 \leq_p L_2 \leq_p L_3$: $\quad$ ($L_1 \subseteq \Sigma_1^*$, $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, $L_3 \subseteq \Sigma_3^*$)

$x \in L_1 \iff f_1(x) \in L_2$

$y \in L_2 \iff f_2(y) \in L_3$

$\left.\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}\right\}$ total poly bs

$f_1 : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$

$f_2 : \Sigma_2^* \to \Sigma_3^*$

wähle $g(x) = f_2(f_1(x))$

$x \in L_1 \iff f_1(x) \in L_2$

$\iff \underbrace{f_2(f_1(x))}_{g(x)} \in L_3$ ✓

b) $L \in NP$, $\underline{L \notin NPC}$

def $\Rightarrow \neg(\forall L' \in NPC.\ L' \leq_p L)$

Logik $\Rightarrow \exists L' \in NPC.\ L' \not\leq_p L \ \wedge \ L \leq_p L'$

$\uparrow$ weil $L \in NP$

$NPC \in NP \Rightarrow \exists L \in NP . L \leq_p L' \wedge \neg (L' \leq_p L)$

10.5 "3 SAT ist NP vollständig aber 2 SAT $\in P$"

a) 2 SAT ist äquivalent zu Graphenproblem

b) 2 SAT NP vollständig dann $P = NP$

$\Updownarrow$

2 SAT $\in P$

a) Wortwahl war nicht ganz eindeutig

Gegeben $F = \{ K_1, \dots K_m \mid$ jede Klausel hat 2 Literale aus $\{x_1, \bar{x}_1 \dots x_n, \bar{x}_n\} \}$

Bilde Graphen $G = (V, E) = G(F)$

$V = \{ x_1, \bar{x}_1, \dots x_n, \bar{x}_n \}$

$E = \{ (x_i, x_j) \mid \bar{x}_i \vee x_j$ ~~oder $x_i \vee \bar{x}_j$~~ Klausel in $F \}$

"(x_i, x_j)" entspricht "$x_i \Rightarrow x_j$"

bzw "$\bar{x}_j \Rightarrow \bar{x}_i$"

$x_j \vee \bar{x}_i$

F ist unerfüllbar g.d.w es eine Variable x gibt mit Pfad $x \dashrightarrow \bar{x}$ und $\bar{x} \dashrightarrow x$ in $G(F)$

Intuition

$x \dashrightarrow \bar{x}$ Pfad in $G(F)$ dann gilt $x \Rightarrow \bar{x}$

$\bar{x} \dashrightarrow x$ " $\bar{x} \Rightarrow x$

Stimmt das ??

"wenn": Annahme $x = x_0\, x_1 \,..\, x_n = \bar{x}$ ist Pfad in $G(F)$

$\bar{x} = y_0\, y_1 \,..\, y_l = x$ " "

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & x' \\ \bar{x} & \longleftarrow & \bar{x}' \end{array}}$$

Sei $a_1 .. a_n$ erfüllende Belegung (zeige unmöglich)

- wenn x = wahr dann ist die Klauselmenge

$$\begin{array}{l} f \\ w \end{array} \left(\begin{array}{c}\bar{x}\\ x_1\end{array}\right) \left(\begin{array}{c}\bar{x}_1\\ x_2\end{array}\right) \left(\begin{array}{c}\cdots\end{array}\right) \left(\begin{array}{c}\bar{x}_{n-1}\\ \bar{x}\end{array}\right)$$

nur erfüllbar wenn x_1 = wahr

x_2 = wahr ....

$\bar{x}$ = wahr nicht möglich

- wenn x = falsch, dann gleiches Argument

mit $\bar{x} = y_0, y_1 \,..\, ..\, y_l = x$

wahr wahr $\lightning$

Also keine erfüllende Belegung möglich !!

"genau dann":

wenn eine der beiden Klauseln "immer" falsch gilt argument nicht und es gibt erfüllende Belegung

Literale also x_i oder $\bar{x}_i$

Idee Starte mit y von dem es keine Kante zu y gibt

- belege y = wahr
  und alle von y erreichbaren Literale mit wahr
- Falls manche Knoten unerreichbar sind
  wähle nächstes y' das keinen Pfad nach $\bar{y}'$ hat

maximal $|V|$ Iterationen, dann alles belegt

Zeige Belegung erfüllt alle Klauseln in F

- jede Klausel hat Form $\bar{x} \vee x'$ oder $x \vee \bar{x}'$

warum $x_1 \vee x_2 = (\bar{\bar{x}}_1) \vee x_2$

per Konstruktion x = wahr (x, x') als Pfad in E Konstruktion setzt x' = wahr

Sei $(\bar{x}, x')$ beliebige Klausel dann
wenn $\bar{x}$ nicht wahr, dann ist x = wahr
dann per Konstruktion x' = wahr

(Hausaufgabe mit viel Zeit: "Induktionsbeweis")

b) Zeige "2SAT ∈ P"

$F \in 2SAT \iff$ in $G(F)$ gibt es keine Variable x mit Pfad von x nach $\bar{x}$ und von $\bar{x}$ nach x

Lösung:

Eingabe F

- Konstruiere $G(F)$ $\quad 2|Var| + 2|Klausel|$

$2n + 2n$

poly

- Für jeden Knoten in $G(F)$ berechne erreichbare Knoten

"Transitive Hülle" von E in maximal $|V|$ Iterationen zu berechnen $\quad |V|\,|V| \cdot |E| \quad$ poly

$\uparrow$ Anzahl Startknoten

Teste dabei ob $\bar{x}$ von x erreichbar und umgekehrt

poly

also $2SAT \in P \rightarrow$ "VL Inferenzmethoden"

Linear

"wahr"

10.6 $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ poly entscheidbar
wenn $L_R = \{(x,y) \mid R(x,y) \text{ wahr}\}$ poly-entscheidbar

Menge der wahren Einträge

R poly balanciert wenn $\forall (x,y) \in R.\ |y| \leq |x|^k$
für ein festes k

"~~bekannt~~"

$L \in NP \iff \exists R$ poly entscheidbar und poly balanciert
$L = \{x \mid \exists y.\ (x,y) \in R\}$

"Projektionssatz" für Aufzählbarkeit ist analog

nicht deterministisch $\iff$ verifizierbar

$\Leftarrow$ Baue OTM für L:
gegeben R und DTM, die R in Zeit $p(n)$ erkennt
Eingabe $x \in \Sigma^*$
Orakel: wähle ein $y \in \Sigma^*$ mit $|y| \leq |x|^k$
Verifi: teste mit DTM ob $(x,y) \in R$
$\hookrightarrow p(|x| + |x|^k)$

Rechenzeit $p(|x|^k)$ polynomiell

Also $L \in NP$

⇒ Start mit NTM für L

Bei Eingabe von x gibt es akzeptierende Folge (nicht det.)

$k_1 \vdash \dots k_m$ so daß k_m akzeptierende Zustand

Sei $(i_1, \dots i_m)$ Folge der nicht det Entscheidungen

d.h. NTM hat in Schritt j die i_j-te Möglichkeit verfolgt.

Dann gibt es eine DTM die bei Eingabe von $(x, (i_1 \dots i_m))$ entscheidet ob $x \in L$

Rechenzeit ist m Schritte

Pe Annahme ist $m \leq p(|x|)$

Wähle $R = L(DTM)$ poly entscheidbar

und <u>längenbeschränkt</u>

poly nom in $|x|$

wähle k = größte Exponent des Polynoms

Klausurvorbereitung:

Übungen durchgehen (Ruhe bewahren)

- Vorbereitung: Material Ordnen, Systematisieren
  - ↳ ein A4 Blatt

Links der "didaktische Erinnerung"

- Nicht verzetteln (1 Punkt ≤ 3 Minuten)
- das einfachste zuerst
- kurzer Plausibilitätscheck
- genau lesen
- klar ausdrücken, wenn möglich

- Schema entspricht Probeklausur

$\boxed{\text{AUSWAHL}}$

70% • Wissensfrage ←

70% • einfache Anwendung

60% • primitive Rek / λ-Kalkül: Ausrechnen, Konstruieren

10% • Entscheidbar / Aufzählbar "Auf Punkte achten"

10% • NP-Vollständig: Arbeitsschritte (3 NP, 4 vollständig)

- (aus PSPACE o.ä.) eher ähnlich
- was theoretisches "beweise Sie"