

Tutorium 09-07-08

10.4

a) \leq_p reflexiv & transitiv

$L \leq_p L \iff \exists f$. polynomiell berechenbar
mit $x \in L \iff f(x) \in L$

$\subseteq \Sigma_1^*$ $\subseteq \Sigma_2^*$ $\subseteq \Sigma_3^*$ wähle $f = id$ ✓

$L_1 \leq_p L_2 \leq_p L_3$:
 $f_1: \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$
 $f_2: \Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_3^*$
 wähle $g(x) = f_2(f_1(x))$

$x \in L_1 \iff f_1(x) \in L_2$ f_1 total
 $y \in L_2 \iff f_2(y) \in L_3$ f_2 poly

$x \in L_1 \iff f_1(x) \in L_2$
 $\iff \underbrace{f_2(f_1(x))}_{g(x)} \in L_3$ ✓

b) $L \in NP$, $L \notin NPC$

def $\rightarrow \neg (\forall L' \in NPC. L' \leq_p L)$
 logisch $\Rightarrow \exists L' \in NPC. L' \not\leq_p L$ $\wedge L \leq_p L'$
 \uparrow weil $L \in NP$

$NP \subseteq NP \Rightarrow \exists L \in NP. L \leq_p L' \wedge \neg (L' \leq_p L)$

10.5 "3 SAT ist NP vollständig aber 2 SAT $\in P$ "

a) 2 SAT ist äquivalent zu Graphzproblem

b) 2 SAT NP vollständig dann $P = NP$

\Updownarrow
2 SAT $\in P$

a) Wortwahl war nicht ganz eindeutig

Gegeben $F = \{K_1, \dots, K_m \mid \text{jede Klausel hat 2 Literale aus } \{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\}\}$

Bilde Graphen $G = (V, E) = G(F)$

$V = \{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\}$

$E = \{(x_i, x_j) \mid \bar{x}_i \vee x_j \text{ oder } x_i \vee \bar{x}_j \text{ Klausel in } F\}$

" (x_i, x_j) " entspricht " $x_i \Rightarrow x_j$ "
bzw. " $\bar{x}_j \Rightarrow \bar{x}_i$ "
 $\bar{x}_j \vee x_i$

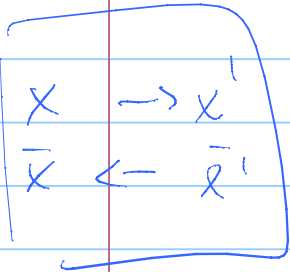
F ist erfüllbar s.d.w. es eine Variable x gibt mit Pfad $x \rightsquigarrow \bar{x}$ und $\bar{x} \rightsquigarrow x$ in $G(F)$

Intuition

$x \dashrightarrow \bar{x}$ Pfad in $G(F)$ dann gilt $x \Rightarrow \bar{x}$
 $\bar{x} \dashrightarrow x$ " " $\bar{x} \Rightarrow x$

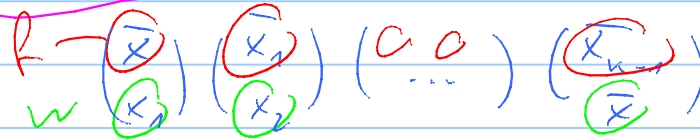
Stimmt das ??

"wenn": Annahme $x = x_0 x_1 \dots x_n = \bar{x}$ ist Pfad in $G(F)$
 $\bar{x} = y_0 y_1 \dots y_l = x$ " "



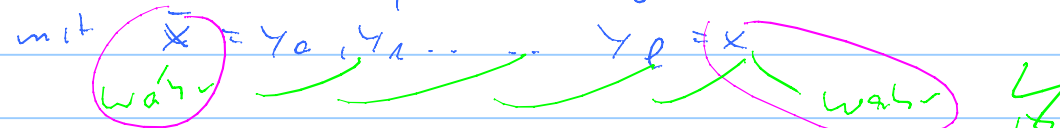
Sei $b_1 \dots a_n$ erfüllende Belegung (zeige unmöglich)

- wenn $x = \text{wahr}$ dann ist die Klauselmenge



nur erfüllbar wenn - $x_1 = \text{wahr}$
 $x_2 = \text{wahr} \dots$
 $\bar{x} = \text{wahr}$ nicht möglich

- wenn $x = \text{falsch}$, dann gleiches Argument



Also keine erfüllende Belegung möglich !!

"genau dann":

wenn eine der beiden Ketten "immer" falsch gilt

argument nicht und es gibt erfüllende Belegung

Literale
also

Idee starte mit γ von dem es keine
Kette zu γ gibt

x_i oder \bar{x}_i

- belege $\gamma = \text{wahr}$

und alle von γ erreichbaren Literale mit wahr

- Falls manche Knoten unerreichbar sind

wähle nächstes γ_i das keinen Pfad nach γ_i hat

maximal $|V|$ Iterationen, dann alles belegt

Zeige Belegung erfüllt alle Klauseln in F

per Konstruktion

$x = \text{wahr}$

(x, x') als Teil

in E

Konstruktion

setzt $x' = \text{wahr}$

• jede Klausel hat Form $\bar{x} \vee x'$ oder $x \vee \bar{x}'$
warum $x_1 \vee x_2 = (\bar{x}_1) \vee x_2$;

Sei (\bar{x}, x') beliebige Klausel dann
wenn \bar{x} nicht wahr, dann ist $x = \text{wahr}$
dann per Konstruktion $x' = \text{wahr}$

(Klauselaufgabe mit viel Zeit: "Induktionsbeweis")

b) Zeige "2SAT $\in P$ "

$F \in 2SAT \iff$ in $G(F)$ gibt es keine Variable x
mit Pfad von x nach \bar{x} und
von \bar{x} nach x

Lösung:

Eingabe F

• Konstruiere $G(F)$

$$2|Var| + 2|Klausel| \\ 2n + 2m \\ \text{poly}$$

• Für jeden Knoten in $G(F)$ berechne
erreichbare Knoten

"Transitive Hülle" von E in maximal $|V|$

Iterationen zu berechnen $|V| \cdot |V| \cdot |E|$ poly

Teste dabei ob

↑ Anzahl Startknoten

\bar{x} von x erreichbar und umgekehrt

poly

also $2SAT \in P \rightarrow$ "VL Inferenzmethoden"
Linear

10.6

$$R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$$

"wahr"

poly entscheidbar

wenn $L_R = \{ (x,y) \mid R(x,y) \text{ wahr} \}$ poly-entscheidbar

Menge der wahren Beiträge

R poly balanciert

wenn $\forall (x,y) \in R. |y| \leq |x|^k$

für ein festes k

~~"bestimmt"~~

$L \in NP \iff \exists R$ poly entscheidbar und poly balanciert
 $L = \{ x \mid \exists y. (x,y) \in R \}$

"Projektivitätssatz" für Aufzählbarkeit ist analog

Nicht deterministisch \iff Verifizierbar

\Leftarrow Base OTH für L :

gegeben R und DTM, die R in Zeit $p(n)$ erkennt
Eingabe $x \in \Sigma^*$

Orakel: wähle ein $y \in \Sigma^*$ mit $|y| \leq |x|^k$

Verifi: teste mit DTM ob $(x,y) \in R$

Rechenzeit $p(|x|^k)$

$\hookrightarrow p(|x| + |x|^k)$
poly, nennlich

Also $L \in NP$

\Rightarrow Start mit NTM für L

Bei Eingabe von x gibt es akzeptierende Folge (nicht det.)

$q_1 \vdash \dots \vdash q_m$ so dass q_m akzeptierender Zustand

Sei (i_1, \dots, i_m) Folge der nicht det. Bitschritte die NTM hat in Schritt j die i_j -te Möglichkeit verfolgt.

Dann gibt es eine DTM die bei Eingabe von $(x, (i_1, \dots, i_m))$ entscheidet ob $x \in L$

Rechenzeit ist in Schritte

Polynomiale ist $m \in p(|x|)$

Wähle $R = L(DTM)$

poly entscheidbar

und langen beschränkt

poly von $|x|$

wähle $U =$ größte Exponent des Polynoms

Klausur vorbereitung:

- Vorbereitung: Übungen durchgehen (Zurück bewahren)
Material Ordnen, Systematisieren
↳ ein A4 Blatt

Links oben "deduktive Erinnere"

- nicht verzetteln (1 Punkt \leq 3 Minuten)
- das einfachste zuerst
- kurzer Plausibilitätscheck
- genau Lesen
- klar ausdrücken, wenn möglich

- Schema entspricht Probeklausur

AUSWAHL

- ↳ 70% • Wissensfrage ←
- ↳ 70% • einfache Anwendung
- 60% • primitive Rechn / λ -Kalkül: Ausrechnen, Umstrukturieren
- ↳ 10% • Entscheidbar / Aufzählbar "Auf Punkte achten"
- ↳ 10% • MP-Vollständig: 7 Arbeitsschritte (3 MP, 4 vollständig)
 - (aus PS?ACE o.ä.) sehr ähnlich
 - was theoretisches "beweise sie"