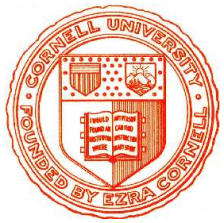
Kryptographie und Komplexität

Einheit 2



Kryptoanalyse einfacher Verschlüsselungssysteme

1. Kryptosysteme & Sicherheit
2. Buchstabenorientierte Kryptosysteme
3. Blockbasierte Kryptosysteme
4. One-Time Pads und Stromchiffren

Kryptographie: typisches Kommunikationsszenario

- **Zwei Parteien wollen kommunizieren** (Alice & Bob)
  - Sicherheit: Dritte sollen nicht wissen, was übermittelt wird (Eve)
  - Übertragungskanal ist möglicherweise unsicher (Internet, Telephon,...)
- **Kommunikationsprotokoll**
  - Alice und Bob tauschen einen Schlüssel aus
    - Schlüssel muß über gesicherten Kanal übertragen werden
  - Alice chiffriert ihre Klartext-Nachricht mit dem Schlüssel
    - Chiffierter Text kann auf unsicherem Kanal übertragen werden
    - Eve kann die Originalnachricht nicht lesen
  - Bob dechiffriert die empfangene Nachricht mit dem Schlüssel
    und erhält den ursprünglichen Klartext
- **Zentrale Fragen**
  - Kann die Chiffrierung von Eve gebrochen werden?
  - Wie kann man die Schlüssel einfach, schnell und sicher austauschen?
  - Kann das Protokoll umgangen werden (und gibt es Alternativen)?

Kryptographie und Kryptoanalyse

- **Forschungsrichtung: sichere Kommunikation**
  - Kryptographische Einwegfunktionen:
    - schwer umzukehrende (mathematische) Verschlüsselungstechniken
  - Kryptographische Protokolle:
    - Vorschriften zu Auswahl, Austausch, Aufbewahrung von Schlüsseln
- **Forschungsrichtung: Angriffe**
  - Angriffe auf Verschlüsselungstechniken (Kryptoanalyse)
    - Algorithmen zur Analyse von Chiffretexten
    - Algorithmen zur Bestimmung von Schlüsseln
  - Angriffe auf Protokolle
    - Man-in-the-middle Attacken, Phishing, Trojaner, gezieltes Raten, ...
  - Angriffe auf Hard- und Software
- **Beides braucht viel Mathematik**
  - Zahlen- Informations-, Komplexitätstheorie, Algebra, Statistik, ...

Verschlüsselungsverfahren: Grundbestandteile

Mathematische Beschreibung von Kryptosystemen

- **Klartexte**
  - Endliche Menge $\mathcal{P}$ ("plaintexts") von Wörtern eines Alphabets
  - Nachrichten, die vom Sender zum Empfänger gehen sollen
- **Chiffretexte (Schlüsseltexte)**
  - Endliche Menge $\mathcal{C}$ ("ciphertexts") von Wörtern eines Alphabets
  - Texte, die über den unsicheren Kanal verschickt werden
- **Schlüssel**
  - Endliche Menge $\mathcal{K}$ ("keyspace") möglicher Schlüssel
  - Daten, die essentiell für Codierung und Decodierung sind
- **Ver- und Entschlüsselungsfunktionen**
  - Funktionen $e_K: \mathcal{P} \to \mathcal{C}$ und $d_K: \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ für jeden Schlüssel $K \in \mathcal{K}$ mit der Eigenschaft $d_K(e_K(x)) = x$ für jeden Klartext $x \in \mathcal{P}$

Verschiebechiffren als Kryptosystem

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
X	Y	Z		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

- **Klartexte $\mathcal{P}$**
  - Wörter, die nur aus Großbuchstaben oder Leerzeichen bestehen
  - Alphabet der Klartexte ist $\Sigma = \{\mathtt{A}, \mathtt{B}, \mathtt{C}, \ldots, \mathtt{Z}, \text{`` ''}\}$
- **Chiffretexte $\mathcal{C}$**
  - Wörter über dem gleichen Alphabet Σ
- **Schlüsselmenge $\mathcal{K}$**
  - Symbole aus dem Alphabet Σ

  im Beispiel: Schlüssel X
- **Verschlüsselungsfunktion e_K**
  - Funktion, die in jedem Wort $x \in \mathcal{P}$ das Symbol A durch K ersetzt, das Symbol B durch den auf K (zyklisch) folgenden Buchstaben, usw.
- **Entschlüsselungsfunktionen d_K**
  - Funktion, die in jedem Wort $y \in \mathcal{C}$ das Symbol K durch A ersetzt, den auf K (zyklisch) folgenden Buchstaben durch B, usw.
  - Per Konstruktion gilt $d_K(e_K(x)) = x$ für jeden Klartext $x \in \mathcal{P}$

Kryptosysteme: Rahmenbedingungen

- **Jedes d_K muß zu e_K invers sein**
  - Mathematisch besehen entspricht ein Kryptosystem einer Gruppe
- **d_K und e_K müssen leicht zu berechnen sein**
  - Auch für große Datenmengen muß Ver-/Entschlüsselung schnell sein
- **Dechiffrierung von Nachrichten muß schwer sein**
  - Ohne Kenntnis von d_K darf Klartext nicht leicht zu bestimmen sein weder durch exakte Berechnung noch mit Wahrscheinlichkeitsanalysen
- **Brechen des Kryptosystems muß schwer sein**
  - Ohne Kenntnis von K darf d_K nicht (schnell) zu bestimmen sein selbst wenn das prinzipielle Verfahren bekannt ist

e_K muß eine Einwegfunktion sein

Wann ist ein Verfahren "leicht" oder "schwer"?

Verwende komplexitätstheoretische Betrachtungen

- **Analysiere Rechenzeit und Platzbedarf** ↦ TI-2
  - Abschätzung: kleine Eingaben und Konstanten sind uninteressant
  - Notation: $t \in \mathcal{O}(f)$, falls $t(n) \leq c * f(n)$ für ein $c > 0$ und fast alle n
  - Bezugsgröße n entspricht Größe von Schlüssel oder Nachricht
- **Nur polynomieller Aufwand ist "leicht"**
  - Zeit/Platzverbrauch beschränkt durch ein Polynom ("liegt in $\mathcal{P}$")
  - Berechnung von $e_K(x)$ / $d_K(y)$ muß polynomiell sein, wenn K bekannt
    - Wirklich effiziente Verfahren benötigen kleine Polynome
  - Bestimmung von $d_K(y)$ darf nicht in $\mathcal{P}$ liegen, wenn K unbekannt
- **Verschlüsselung ist ein $\mathcal{NP}$-Problem** (relativ zu $|K|$)
  - Sicherheit liegt in Schwierigkeit der Bestimmung des Schlüssels K
  - Das Dechiffrierungsproblem kann "bestenfalls" $\mathcal{NP}$-vollständig sein

Private-Key und Public-Key Verfahren

- **Private-Key Kryptographie** (symmetrisch)
  - Sender und Empfänger benutzen "den gleichen" geheimen Schlüssel
  - Details der Verschlüsselung müssen geheim gehalten werden da d_K=e_K
  - Technisch kompliziert aber mathematisch (relativ) einfach
  - Effizient, da Hardwareunterstützung möglich (z.B. AES in WLAN Routern)
  - Problem: Schlüssel muß vorher auf sichere Art ausgetauscht werden
- **Public-Key Kryptographie** (asymmetrisch)
  - Ver- und Entschlüsselung benutzen verschiedene (inverse) Schlüssel
  - Empfänger kann Schlüssel e_K offenlegen: d_K aus e_K nicht zu bestimmen
    - Kein geheimer Schlüsselaustausch erforderlich
    - Jeder kann spontan sichere Kommunikation mit Empfänger aufbauen
  - Mathematisch aufwendig, aber sehr flexibel
- **Sichere Kommunikation großer Datenmengen**
  - Austausch eines geheimen Session-keys über Public-Key Verbindung
  - Verwendung eines sicheren, effizienten symmetrischen Verfahrens

Sicherheit und Kryptoanalyse

Untersuche Techniken zur Codeentschlüsselung

- **Annahme: Angreifer kennt Kryptosystem**
  - Man muß davon ausgehen, daß ein Verschlüsselungsverfahren nicht geheim bleiben kann und der Angreifer es kennt (Kerckhoffs Prinzip)
  - Ein Angreifer wird sicherlich alle gängigen Verfahren durchgehen
  - Kryptosysteme müssen auch unter dieser Annahme sicher sein
- **Mögliche Ziele eines Angreifers**
  - Decodierung einer Nachricht oder eines wichtigen Teils davon
  - Aufdecken des Schlüssels: zukünftige Nachrichten sind ungeschützt
  - Verfälschung, Vortäuschen einer anderen Identität, ...
- **Angriffsszenarien bestimmen Grad der Sicherheit**
  - Verfahren mussen auch dann noch sicher sein, wenn Angreifer relativ viel Informationen in der Hand hat bekommen hat
  - Es ist möglich, daß dem Angreifer einige Paare von Schlüsseltexten und zugehörigen Klartexten bekannt geworden sind

Kryptoanalyse – Angriffsszenarien

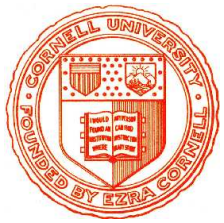
- **Ciphertext only**
  - Angreifer kennt nur die verschlüsselte Nachricht
  - Einfachster Angriff: Brute Force (Austesten aller Möglichkeiten)
  - Bessere Entschlüsselungsversuche setzen statistische Analysen ein
- **Known plaintext**
  - Angreifer kennt Paare von Klar-/Schlüsseltexten oder Fragmenten
  - Schlüssel könnte durch Analyse von Korrelationen abgeleitet werden
- **Chosen plaintext**
  - Angreifer hat (temporären) Zugang zum Verschlüsselungverfahren z.B. auf eine Chipkarte oder ein Public-Key Verfahren
  - Liefert beliebig viele Klar-/Schlüsseltextpaare
- **Chosen ciphertext**
  - Angreifer hat temporären Zugang zum Entschlüsselungsverfahren (als Black Box) und versucht, den Schlüssel zu extrahieren

Kryptoanalyse – Sicherheitsbegriffe

- **Effiziente Sicherheit** (Computational Security)
  - Brechen des Kryptosystems erfordert mindestens n Schritte ($n > 10^{100}$)
    · Theoretisches Ziel, in dieser Form praktisch nicht nachweisbar
  - Realistische Variante: Bestes bekanntes Verfahren zum Brechen des Kryptosystems benötigt mindestens n Schritte
  - Geläufigster aller Sicherheitsbegriffe
- **Beweisbare Sicherheit** (Provable Security)
  - Sicherheit des Systems basiert auf einem mathematischen Problem, das als schwer lösbar (z.B. $\mathcal{NP}$-vollständig) bekannt ist
  - Keine absolute Sicherheit, solange $\mathcal{P}\neq\mathcal{NP}$ ungeklärt (aber nahe daran)
- **Perfekte Sicherheit** (Unconditional Security)
  - Kein Angreifer kann das System jemals brechen, ... selbst wenn beliebig viel Zeit und Rechnerkapazität bereitsteht
  - Schlüsseltext darf keinerlei Information über Klartext enthalten
  - Nur mit One-Time Pads erreichbar

Kryptographie und Komplexität

Einheit 2.1



Buchstabenorientierte Kryptosysteme
Implementierung und Analyse

1. Verschiebechiffren
2. Affine Chiffren
3. Allgemeine Substitutionschiffre
4. Polyalphabetische Chiffren

Substitutionbasierte Chiffren

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
X	N	Y	A	H	P	O	G	Z	Q		W	B	T	S	F	L	R	C	V	M	U	E	K	J	D	I

- **Buchstaben werden durch andere ersetzt**

  Aus `ENDE UM DREI UHR` wird `HTAHIMBIARHZIMGR`

  – Originaltext durch Rückwärtsersetzen ermittelbar

- **Unterschiedlich aufwendige Varianten**

  – Verschiebechiffre: Buchstaben werden um festen Betrag verschoben

  · Sehr einfache Ver-/Entschlüsselung, leicht zu merkender Schlüssel

  – Affine Chiffre: Buchstaben werden um ein Vielfaches ihrer eigenen Position und einen konstanten Betrag verschoben

  · Ver-/Entschlüsselung aufwendiger, leicht zu merkender Schlüssel

  – Substitutionschiffre: Buchstaben im Alphabet werden permutiert

  · Ver-/Entschlüsselung etwas mühsam, langer Schlüssel

Verschiebechiffren

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
X	Y	Z		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

- **Zyklische Verschiebung der Buchstaben im Alphabet**
  - Schlüssel ist Buchstabe, der das A ersetzt (hier X)
  - Schlüsseltext wird durch Verschieben der Klartextbuchstaben erzeugt

    Aus INFORMATIK BRAUCHT MATHEMATIK

    wird EJBKNIXPEGWYNXQZDPWIXPDAIXPEG

- **Chiffrierverfahren entspricht Modulararithmetik**
  - Bei n Symbolen erhält jeder Buchstabe eine Zahl zwischen 0 und $n-1$
  - Schlüssel $\boldsymbol{K}$ wird ebenfalls eine Zahl zwischen 0 und $n-1$
  - Im Beispiel war $n = 27$ und $K = 23$ (der Code von 'X')
  - Verschlüsselung wird Addition modulo n: $\boldsymbol{e_K(x)} = x + K \bmod n$
  - Entschlüsselung wird Subtraktion modulo n: $\boldsymbol{d_K(y)} = y - K \bmod n$

Mathematik: Gesetze von Zahlen und Restklassen

- **Teilbarkeit**
  - $\boldsymbol{a|n}$ (a teilt n), falls $n = a{\cdot}b$ für ein $b \in \mathbb{Z}$
  - Aus $a|b$ folgt $|a| \leq |b|$, falls $b \neq 0$
  - Aus $a|b$ und $b|a$ folgt $|a| = |b|$
  - Aus $a|b$ und $b|c$ folgt $a|c$ — Transitivität
  - Aus $a|b$ folgt $ac|bc$ für alle $c \in \mathbb{Z}$ — Multiplikativität
- **Division mit Rest**
  - Für $a \in \mathbb{Z}, b{>}0$ gibt es eindeutige Zahlen q, r mit $a = qb{+}r$ und $0 \leq r < b$
  - Bezeichnung: $q = \boldsymbol{\lfloor a/b \rfloor}$ und $r = \boldsymbol{a \bmod b}$
- **Restklassen modulo $\boldsymbol{n}$**
  - $\boldsymbol{a \equiv b \bmod n}$ (a kongruent zu b modulo n), falls $n \mid b{-}a$
  - Kongruenz module n ist eine Äquivalenzrelation
  - $[a] = a{+}n\mathbb{Z} := \{b \mid b \equiv a \bmod n\}$ ist die Restklasse von a modulo n
  - Die Menge aller Restklassen modulo n wird mit $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezeichnet
  - $\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}} = \{0, .., n{-}1\}$ ist der Standardvertreter für die Klassen in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Mathematik: Restklassen bilden einen Ring

- **Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**
  - Definiert auf Vertretern: $[a]+[b] := [a+b]$ $[a]\cdot[b] := [a\cdot b]$
  - Einfachere Darstellung in $\mathbb{Z}_n$: $a+_n b := a+b \bmod n$ $a\cdot_n b := a\cdot b \bmod n$

    Index n wird weggelassen, wenn aus dem Kontext ersichtlich
- **Rechengesetze**

  Für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}_n$ gilt

$a+b \in \mathbb{Z}_n$	Abgeschlossenheit der Addition
$(a+b)+c = a+(b+c)$	Assoziativität der Addition
$a+0 = 0+a = a$	Neutrales Element der Addition
$a+(n-a) = (n-a)+a = 0$	Inverse Elemente der Addition
$a+b = b+a$	Kommutativität der Addition
$a\cdot b \in \mathbb{Z}_n$	Abgeschlossenheit der Multiplikation
$(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$	Assoziativität der Multiplikation
$a\cdot 1 = 1\cdot a = a$	Neutrales Element der Multiplikation
$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$	Distributivität der Multiplikation
$a\cdot b = b\cdot a$	Kommutativität der Multiplikation

Komplexität der Operationen auf Restklassen

- **Addition ganzer Zahlen** (ohne Reduktion modulo n)
  - Binäre Addition benötigt $\mathcal{O}(1)$ Schritte pro Bit
  - Addition $a + b$ erfordert Zeit $\mathcal{O}(\max\{\|a\|, \|b\|\})$ ($\|a\|$: Anzahl der Bits von a)
- **Multiplikation ganzer Zahlen**
  - Schriftliche Multiplikation mit b benötigt $\mathcal{O}(\|a\|)$ Schritte pro Bit von b
  - Multiplikation $a \cdot b$ erfordert Zeit $\mathcal{O}(\|a\| \cdot \|b\|)$
- **Division mit Rest:** $q = \lfloor a/b \rfloor$, $r = a \bmod b$
  - Schriftliche Division durch b benötigt $\mathcal{O}(\|b\|)$ Schritte pro Bit von q
  - Bestimmung von r und q erfordert Zeit $\mathcal{O}(\|q\|\cdot\|b\|)$ und Platz $\mathcal{O}(\|a\|+\|b\|)$
- **Addition:** $a+_n b$ **:=** $a+b \bmod n$
  - Wegen $a, b < n$ und $a+b < 2n$ erfordert $a+_n b$ insgesamt Zeit $\mathcal{O}(\|n\|)$
- **Subtraktion:** $a-_n b$ **:=** $a+_n(n-b)$
  - Gleicher Aufwand wie Addition: Zeit $\mathcal{O}(\|n\|)$
- **Multiplikation:** $a\cdot_n b$ **:=** $a\cdot b \bmod n$
  - Wegen und $a\cdot b < n^2$ erfordert $a\cdot_n b$ insgesamt Zeit $\mathcal{O}(\|n\|^2)$

Programmierung der Verschiebechiffre

- **Einlesen des Klartexts:** `INFORMATIK BRAUCHT MATHEMATIK`
- **Umwandlung jedes Buchstaben in eine Zahl**
  - Symbole des Alphabets sind durchnumeriert

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

  - Buchstaben des Textes werden schrittweise durch ihre Zahl ersetzt
    Implementierbar als Tabellensuche oder fest verdrahtete Operation
  - Ergebnis ist Liste von Zahlen in $\mathbb{Z}_n$ (n = Größe des Alphabets)

    [8;13;5;14;17;12;0;19;8;10;26;1;17;0;20;2;7;19;26;12;0;19;7;4;12;0;19;8;10]

- **Verschiebung durch Addition in $\mathbb{Z}_n$**
  - Für jede Zahl x der Liste berechne $\boldsymbol{e_K(x)} = x + K \bmod n$

    [4;9;1;10;13;8;23;15;4;6;22;24;13;23;16;25;3;15;22;8;23;15;3;0;8;23;15;4;6]

  - Für die Entschlüsselung berechne $\boldsymbol{d_K(x)} = x - K \bmod n$

- **Rückumwandlung der Zahlen in Buchstaben**
  - Wieder Tabellensuche oder fest verdrahtete Operation

    `EJBKNIXPEGWYNXQZDPWIXPDAIXPEG`

Berechnungsaufwand der Verschiebechiffre

- **Meßgröße ist Länge des Klartextes w**
  - Für Entschlüsselung: Länge des Schlüsseltextes
- **Umwandlung zwischen Buchstaben und Zahlen**
  - Pro Buchstaben linearer Zeitaufwand relativ zur Alphabetgröße n
    Da n konstant (und klein) ist, gilt der Aufwand als konstant $\mathcal{O}(1)$
  - Gesamtaufwand für Umwandlung eines Klartextes ist linear $\mathcal{O}(|w|)$
- **Verschiebung innerhalb der Zahlenfolge**
  - Addition/Subtraktion in $\mathbb{Z}_n$ benötigt Zeit $\mathcal{O}(\|n\|)$
    Da n konstant (und klein) ist, liegt der Aufwand in $\mathcal{O}(1)$
  - Gesamtaufwand für Verschiebung innerhalb der Liste ist linear $\mathcal{O}(|w|)$

Die Verschiebechiffre benötigt lineare Zeit

Kryptoanalyse der Verschiebechiffre

Ziel ist Bestimmung von Schlüssel und Klartext

- **Brute-force Attacken sind durchführbar**
  - Vollständige Schlüsselsuche: jeder mögliche Schlüssel wird probiert
  - Es werden alle möglichen Klartexte generiert
  - Der Originaltext ist einer der erzeugten Texte
  - Nur wenige erzeugte Texte sind sprachlich akzeptabel (Wörterbuch)
  - Akzeptable Texte können "von Hand" untersucht werden
- **Geringer Aufwand für "Ciphertext only" Attacke**
  - Aufwand zur Erzeugung eines möglichen Klartextes ist $\mathcal{O}(|w|)$
  - Aufwand zur Überprüfung der Texte mit Wörterbuch ist konstant
  - Schlüssel der Verschiebechiffre sind die Buchstaben des Alphabets
    Die Anzahl möglicher Schlüssel ist fest (unabhängig von Textlänge)
  - **Verschiebechiffre kann in linearer Zeit gebrochen werden**
  - Selbst eine Dechiffrierung von Hand ist leicht
    Aus `MVLMHBUHLZMQHBPZ` wird `ENDE UM DREI UHR` (K=8)

Die Affine Chiffre

Erschwere Brute-force Attacken durch größere Anzahl von Schlüsseln

- **Erweitere Verschiebung auf affine Funktionen**
  - Neben der Addition wird eine Multiplikation eingesetzt
  - Verschlüsselung von x wird $\boldsymbol{e_K(x)} = ax+b \bmod n$
  - Entschlüsselung von y wird $\boldsymbol{d_K(y)} = a^{-1}(y-b) \bmod n$
  - Schlüssel K ist ein Paar $(a, b) \in \mathbb{Z}_n^2$ (Verschiebechiffre: $a = 1$)
- **Anwendungsbeispiel mit $n = 27$ und $K = (8, 3)$**
  - Aus `ENDE UM DREI UHR` $\hat{=}$ [4;13;3;4;26;20;12;26;3;17;4;8;26;20;7;17]
    wird [8;26;0;8;22;1;18;22;0;4;11;13;22;1;5;4]
    $\hat{=}$ `I AIWBSWAELNWAFE`
  - Entschlüsselungsfunktion ist $d_K(y) = 17(y-3) \bmod 27$
- **Nicht jede affine Funktion ist brauchbar**
  - $K = (18, 2)$ bildet 3,6,9,12,15,18,21,24 jeweils auf die Zahl 2 ab
  - $a = 18$ hat in $\mathbb{Z}_{27}$ kein eindeutiges multiplikatives Inverses
  - Eine eindeutige Entschlüsselung ist nicht möglich

Invertierung in $\mathbb{Z}_n$: Löse $a \cdot_n x = 1$

- **Unlösbar wenn a und n gemeinsame Teiler haben**
  - **Ist die Gleichung $a \cdot_n x = 1$ ganzzahlig lösbar, so ist $gcd(a, n) = 1$**
    $gcd(a, n)$ ist der größte gemeinsame Teiler, also die größte Zahl $t \in \mathbb{N}$ mit $t \mid a$ und $t \mid n$
  - Beweis: Sei $t \in \mathbb{N}$ ein Teiler von a und n, also $a = t \cdot i$ und $n = t \cdot j$
    Wenn $a \cdot_n x = 1$, so gibt es ein k mit $t \cdot i \cdot x = a \cdot x = n \cdot k + 1 = t \cdot j \cdot k + 1$
    Es folgt $t \cdot (i \cdot x - j \cdot k) = 1$ und damit $t = 1$
- **Lösungen sind eindeutig**
  - **Gilt $gcd(a, n) = 1$ und $a \cdot_n x = a \cdot_n y$ für $x, y \in \mathbb{Z}_n$, so ist $x = y$**
  - Beweis: Sei $a \cdot x = a \cdot y + j \cdot n$ und o.B.d.A. $y < x$
    Dann gilt $a \cdot (x - y) = j \cdot n$ und $n \mid x - y$ wegen $gcd(a, n) = 1$
    Wegen $x, y \in \mathbb{Z}_n$ folgt $x - y = 0$, also $x = y$
  - **Sind $x, y \in \mathbb{Z}_n$ Lösungen für $a \cdot_n x = 1$ und $a \cdot_n y = 1$, so ist $x = y$**
- **Lösbar wenn a und n teilerfremd**
  - **Ist $gcd(a, n) = 1$, so ist die Gleichung $a \cdot_n x = 1$ ganzzahlig lösbar**
  - Beweis: Jede Gleichung $a \cdot_n x = z$ hat maximal eine Lösung in $\mathbb{Z}_n$
    Also nimmt $a \cdot_n x$ für jedes $x \in \mathbb{Z}_n$ einen anderen Wert aus $\mathbb{Z}_n$ an
    Somit muß jeder Wert $z \in \mathbb{Z}_n$ erreicht werden, insbesondere auch $z = 1$

Invertierung in $\mathbb{Z}_n$ - algorithmisch

- **Vollständige Suche ist prinzipiell möglich**
  - Affine Chiffre benötigt Invertierung nur einmal für Schlüsselerzeugung
  - Für kleine n findet Computer multiplikative Inverse sehr schnell
  - Lösung muß existieren, wenn $gcd(a, n) = 1$
- **Invertierung durch Suche ist ineffizent**
  - Von Hand auch für kleine Alphabete kaum noch durchzuführen
  - Modernen Verfahren benötigen Invertierung in $\mathbb{Z}_n$ für extrem große n
- **Elegantere Lösung mit euklidischem Algorithmus**
  - Euklidischer Algorithmus berechnet $gcd(a, n)$ sehr effizient
  - Ablauf des euklidischen Algorithmus enthält Informationen zur Lösung der Gleichung $a \cdot x + n \cdot y = gcd(a, n)$ für gegebenes a, n

Analysiere und erweitere euklidischen Algorithmus

Euklidischer Algorithmus

- **Grundlage: Satz über Eigenschaften von gcd**
  - Für $a, n \in \mathbb{Z}$ ist $gcd(a, n) = gcd(|a|, |n|)$
  - Für $n = 0$ ist $gcd(a, n) = a$
  - Für $n > 0$ ist $gcd(a, n) = gcd(n, a \bmod n)$
- **Einfache funktionale Implementierung**

```
let rec gcd' a n
  = if n=0 then a else gcd' n (a mod n);;
let gcd a n
  = gcd' (abs a) (abs n);;
```

  - Korrektheit folgt unmittelbar aus obigem Theorem
  - Terminierung folgt aus einfachem Monotonieargument oder expliziter Laufzeitanalyse (nächste Folie)
  - Imperative Implementierung mit einfacher `while` Schleife möglich

Euklidischer Algorithmus: Laufzeitanalyse

- **Wichtig ist Anzahl der Aufrufe**
  - In i-ten Aufruf wird $n_{i+1} := a_i \bmod n_i$ berechnet $\quad \mathcal{O}(\|\lfloor a_i/n_i \rfloor\| \cdot \|n_i\|)$
  - Der Folgeaufruf setzt $a_{i+1} := n_i$ und n_{i+1} wie berechnet
  - Algorithmus terminiert nach $k{+}1$ Schritten, wenn $n_{k+1} = 0$
    Terminierung ist sicher, da Folge der n_i streng monoton fallend
- **Modulare Reduktion verkürzt "exponentiell"**
  - Zeige, daß Folge der n_i exponentiell fällt: $\boldsymbol{n_i > \vartheta^{k-i}}$ **für ein** $\boldsymbol{\vartheta > 1}$
  - Aufgrund der Monotonie ist $n_{k+1} = 0$, $n_k \geq 1$ und $n_{k-1} \geq 2$
  - Sei $n_j > \vartheta^{k-j}$ für alle $j \geq i$ bewiesen
  - Dann gilt: $n_{i-1} = a_i = \lfloor a_i/n_i \rfloor \cdot n_i + n_{i+1}$
    $\geq n_i + n_{i+1} > \vartheta^{k-i} + \vartheta^{k-(i+1)} = \vartheta^{k-(i-1)}(1/\vartheta + 1/\vartheta^2)$
  - Zu bestimmen bleibt ein $\vartheta > 1$ mit $1/\vartheta + 1/\vartheta^2 > 1$
    Multiplikation mit ϑ^2 ergibt $\vartheta + 1 > \vartheta^2$ bzw. $1 > (\vartheta - 1/2)^2 - 1/4$
    Für $\vartheta = 1/2 + \sqrt{5/4}$ gilt also immer $n_i > \vartheta^{k-i}$
- **Es gibt nur logarithmisch viele Aufrufe**
  - Wegen $n_1 = n$ folgt $k < \log n/(\log \vartheta) + 1 < 1.441 \log n + 1$

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Bestimme $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot x + n \cdot y = gcd(a, n)$

- **Bestimme x, y während Berechnung des gcd**
  - Euklidischer Algorithmus bestimmt gcd durch Folge von Werten n_i
  - $gcd(a, n)$ ist Wert von n_k einen Schritt vor der Terminierung
  - Analog bestimme x, y durch Folge von Werten x_i, y_i mit $a \cdot x_i + n \cdot y_i = n_i$
- **Herleitung des Algorithmus aus der Invariante**
  - Es ist $n_{i+1} = a_i \bmod n_i = a_i - \lfloor a_i / n_i \rfloor \cdot n_i = n_{i-1} - q_i \cdot n_i$ $\qquad q_i = \lfloor n_{i-1} / n_i \rfloor$

    $= a \cdot x_{i-1} + n \cdot y_{i-1} - q_i \cdot a \cdot x_i - q_i \cdot n \cdot y_i$

    $= a \cdot (x_{i-1} - q_i \cdot x_i) + n \cdot (y_{i-1} - q_i \cdot y_i) = a \cdot x_{i+1} + n \cdot y_{i+1}$
  - Startwerte: $n_1 = n = a \cdot 0 + n \cdot 1$ also $x_1 := 0$ und $y_1 := 1$

    Der Einfachheit halber: $n_0 = a = a \cdot 1 + n \cdot 0$ also $x_0 := 1$ und $y_0 := 0$
- **Funktionale Implementierung**

```
let rec egcd' a n x y x' y'
 = if n=0 then (a,x',y')
   else egcd' n (a mod n) (x'-a/n*x) (y'-a/n*y') x y;;
let egcd a n = egcd' (abs a) (abs n) 0 1 1 0;;
```

Invertierung in $\mathbb{Z}_n$: Implementierung & Laufzeit

- **Instanz des erweiterten euklidischen Algorithmus**
  - $egcd(a,n)$ liefert $g = gcd(a,n)$ sowie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot x + n \cdot y = g$
    Es folgt $a \cdot x \bmod n = g$
  - Da x negativ sein kann, bestimme $x' := x \bmod n$
  - Dann ist $x' \in \mathbb{Z}_n$ und $a \cdot_n x' = g$ also $\boldsymbol{x' = a^{-1}}$, falls $gcd(a,n) = 1$
- **Laufzeitanalyse**
  - Bestimmung von $n_{i+1} := a_i \bmod n_i$ benötigt Zeit $\mathcal{O}(\|q_i\| \cdot \|n_i\|)$
  - Bestimmung von $x_{i+1} = x_{i-1} - q_i \cdot x_i$ und y_{i+1} benötigt Zeit $\mathcal{O}(\|q_i\| \cdot \|n_i\|)$
  - Wegen $n_i < n$ benötigt der gesamte Algorithmus maximal $\mathcal{O}(\Sigma_{i=1}^{k} \|q_i\| \cdot \|n\|)$
  - Wegen $\Pi_{i=1}^{k} q_i < a$ (also $\Sigma_{i=1}^{k} (\log q_i) < \log a$) und $k \in \mathcal{O}(\log n)$
    liegt die Gesamtlaufzeit von $egcd(a,n)$ in $\mathcal{O}(\|a\| \cdot \|n\|)$
  - Die Zeit für die modulare Reduktion von x ist hiergegen vernachlässigbar

Invertierung in $\mathbb{Z}_n$ benötigt eine Gesamtlaufzeit in $\mathcal{O}(\|n\|^2)$

Berechnungsaufwand der Affinen Chiffre

- **Aufwand für Auswahl des Schlüssels (einmalig)**
  - Alice wählt $a \in \mathbb{Z}_n$ mit $gcd(a,n) = 1$ und $b \in \mathbb{Z}_n$ pro test $\mathcal{O}(\|n\|^2)$
  - Zahl der Tests hängt ab von Zahl der zu n teilerfremden Elemente
    Bob bestimmt das multiplikativ Inverse $a^{-1} \in \mathbb{Z}_n$ $\mathcal{O}(\|n\|^2)$
- **Aufwand für Ver- und Entschlüsselung**
  - Umwandlung zwischen Buchstaben und Zahlen $\mathcal{O}(|w|)$
  - Berechnen der affinen Funktion ($a \cdot_n x +_n b$ / $a^{-1} \cdot_n (y -_n b)$) $\mathcal{O}(|w| \cdot \|n\|^2)$
  - Gesamtaufwand bei festem Alphabet (n klein) ist linear $\mathcal{O}(|w|)$
- **Aufwand für Brute-Force Attacke**
  - Pro Versuch Aufwand $\mathcal{O}(|w|)$ für die Entschlüsselung
  - Anzahl der möglichen Schlüssel ist $\varphi(n) \cdot n$, wobei $\boldsymbol{\varphi(n)}$ die Anzahl der zu n teilerfremden Elemente von $\mathbb{Z}_n$ bezeichnet
  - Bei festem Alphabet ist der affine Chiffre in linearer Zeit zu brechen
  - Nicht sicher gegen Brute-Force Attacken mit einem Computer
    aber für eine Dechiffrierung von Hand gibt es zu viele Schlüssel
    ($18 \cdot 27 = 486$ Schlüssel bei nur 27 Symbolen)

Mathematik: Die Eulersche φ-Funktion

- $\boldsymbol{\varphi(n) = |\{a \in \mathbb{Z}_n \mid gcd(a,n) = 1\}|}$
  - Anzahl der Elemente von $\mathbb{Z}_n$, die zu n relativ prim (teilerfremd) sind
  - Für jede Primzahl p ist $\varphi(p) = p-1$
    da mit Ausnahme der 0 jedes Element von $\mathbb{Z}_p$ zu p teilerfremd ist
  - Für jede Primzahl p ist $\varphi(p^e) = p^e - p^{e-1}$
    da alle Vielfachen von p in $\mathbb{Z}_p$ gemeinsame Teiler mit p^e haben
  - Für die Primfaktorzerlegung $p_1^{e_1}..p_k^{e_k}$ von n ist $\varphi(n) = \Pi_{i=1}^{k}(p_i^{e_i} - p_1^{e_i-1})$
    Alle Vielfachen jedes der p_i in $\mathbb{Z}_n$ haben gemeinsame Teiler mit n
    Gemeinsame Vielfache der p_i dürfen nicht mehrfach gezählt werden
- **Das ASCII Alphabet hat 95 echte Symbole**
  - Wegen $\varphi(95) = 18 * 4 = 72$ hat die affine Chiffre 6840 Schlüssel in $\mathbb{Z}_{95}$
- **Für jede Primzahl p ist $\mathbb{Z}_p$ ein Zahlenkörper**
  - Jede von Null verschiedene Zahl hat ein multiplikativ Inverses
  - Eigenschaft ist wichtiger Ausgangspunkt für sichere Kryptosysteme

Mathematik: Restklassenkörper

- **Halbgruppen, Monoide und Gruppen**
  - Halbgruppe: Menge G mit assoziativer Abbildung $\circ : G \times G \to G$
  - Monoid: Halbgruppe mit neutralem Element (oft Null genannt)
  - Gruppe: Monoid, bei dem jedes Element ein Inverses hat
    Die Ordnung einer Gruppe ist die Anzahl ihrer Elemente
  - abelsche (Halb-)Gruppe: (Halb-)Gruppe mit kommutativer Abbildung

    $(\mathbb{Z}_n,+_n)$ ist eine abelsche Gruppe, $(\mathbb{Z}_n,\cdot_n)$ ist ein abelsches Monoid
- **Ringe und Körper**
  - Ring: Menge R mit Abbildungen $+$ und $\cdot$, wobei $(R,+)$ abelsche Gruppe, $(R,\cdot)$ Halbgruppe und $\cdot$ distributiv
  - Ring mit Einselement: Multiplikation $\cdot$ hat neutrales Element
  - Kommutativer Ring: Ring $(R,+,\cdot)$ mit kommutativer Multiplikation

    $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ist kommutativer Ring mit Einselement
  - Körper: kommutativer Ring mit Einselement, bei dem jedes von Null verschiedene Element invertierbar (bzgl. $\cdot$) ist

    Satz: $(\mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n)$ ist genau dann ein Körper wenn n Primzahl ist

Kryptoanalyse der affinen Chiffre

- **Alternative zur Brute-Force Attacken**
  - Brute-Force Attacken sind nur noch mit dem Computer möglich
  - Dennoch ist eine von-Hand Analyse von Schlüsseltexten möglich
- **Betrachte Häufigkeiten von Buchstaben im Text**
  - Klartextbuchstaben werden in feste Schlüsseltextsymbole umgewandelt
  - Buchstabenhäufigkeiten in deutschen Texten sind sehr verschieden
    - Sehr häufig: E$\hat{=}$14.7%, ' '$\hat{=}$12%, N$\hat{=}$8.8%, I, S, R, A, T, D, H, U
    - Häufig: B, C, F, G, K, L, M, O, W, Z
    - Selten: J, P, V, Y, Q$\hat{=}$0.014%, X$\hat{=}$0.013%
  - Statistische Analysen liefern bei langen Texten wertvolle Informationen
- **Analysiere je zwei mögliche Zuordnungen**
  - Zuordnungen liefern zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

    $a \cdot_n x_1 +_n b = y_1$ und $a \cdot_n x_2 +_n b = y_2$
  - Gleichungssystem liefert Vorschlag für Schlüssel $K = (a, b)$
  - Im Mißerfolgsfall ($gcd(a, n) \neq 1$) versuche andere Zuordnungen

Kryptoanalyse der affinen Chiffre

- **Untersuche den (langen) Chiffretext**

  HPOGNUEAIJSEEKYSOVSXBG SGHPOEOYGZDYJOESXBGVPXHOLGNJEGOP
  XOGNYLGQSOXHJPAIOYGCJNSESYGDIXOGOPBOXOGSXLOYJNBOXGELNLL

  – Bestimme die Häufigkeit der Buchstaben im Chiffretext

A 2	B 4	C 1	D 2	E 8	F 0	G 14	H 4	I 3
J 6	K 1	L 6	M 0	N 6	O 16	P 6	Q 1	R 0
S 9	T 0	U 1	V 2	W 0	X 9	Y 7	Z 1	` ` 1

- **Versuche Zuordnung der häufigsten Buchstaben**
  – Ordne O, G, S, X den Klartextbuchstaben E, ‘ ‘, N, I zu
  – Erster Versuch: E$\mapsto$O, ‘ ‘$\mapsto$G liefert $e_K(4) = 14$ und $e_K(26) = 6$
  – Liefert Gleichungssystem $4 \cdot_{27} a +_{27} b = 14$ und $26 \cdot_{27} a +_{27} b = 6$
  Lösung: $22 \cdot_{27} a = 19$ also $\boldsymbol{a = 7}$ und $\boldsymbol{b = 13}$
  Wegen $gcd(7, 27) = 1$ ist $(7, 13)$ ein gültiger Schlüssel
  – Es ist nicht immer so einfach: bei Mißerfolg teste andere Zuordnungen
- **Entschlüssele Text mit $\boldsymbol{d_K(y) = 4 \cdot_{27} (y -_{27} 13)}$**

  DIE ABSCHLUSSPRUEFUNG ZU DIESER VORLESUNG FINDET ALS EINE
  ART MUENDLICHER KLAUSUR OHNE EIGENE UNTERLAGEN STATT

Allgemeine Substitutionschiffre

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
X	N	Y	A	H	P	O	G	Z	Q		W	B	T	S	F	L	R	C	V	M	U	E	K	J	D	I

- **Permutiere Buchstaben des Alphabets**
  - Schlüssel ist Permutation π der Zahlen $[0,..,n-1]$
  - Chiffretext entsteht durch entsprechende Ersetzung der Buchstaben
  - Verschlüsselung von x wird $\boldsymbol{e_\pi(x) = \pi(x)}$
  - Entschlüsselung von y wird $\boldsymbol{d_\pi(y) = \pi^{-1}(y)}$
  - Leicht zu programmieren und anzuwenden, langer Schlüssel (n Zahlen)
  - **Signifikante Erhöhung der Zahl möglicher Schlüssel**
    und komplexer als Affine Chiffre, daher nicht so leicht zu brechen
- **Anwendungsbeispiel**
  - π ist [23;13;24;0;7;15;14;6;25;16;26;22;1;19;18;5;11;17;2;21;12;20;4;10;9;3;8]
  - Aus `ENDE UM DREI UHR` $\hat{=}$ [4;13;3;4;26;20;12;26;3;17;4;8;26;20;7;17]
    wird [7;19;0;7;8;12;1;8;0;17;7;25;8;12;6;17] $\hat{=}$ `HTAHIMBIARHZIMGR`
  - Entschlüsselungspermutation ist `"DMSZWPHE YXQUBGFJRONVTLACIK"`
    bzw. π^{-1} = [3;12;18;25;22;15;7;4;26;24;23;16;20;1;6;5;9;17;14;13;21;19;11;0;2;8;10]

Berechnungsaufwand der Substitutionschiffre

- **Darstellung des Schlüssels als Permutation**
  - Liste der Buchstaben, die `A..Z,` ` codieren
    - z.B. `"XNYAHPOGZQ WBTSFLRCVMUEKJDI"`
  - Liste der zugehörigen Zahlen (d.h. Indizes der Buchstaben)
    - z.B. [23;13;24;0;7;15;14;6;25;16;26;22;1;19;18;5;11;17;2;21;12;20;4;10;9;3;8]
  - Länge des Schlüssels entspricht Größe n des Alphabets
- **Aufwand für Ver- und Entschlüsselung**
  - Umwandlung zwischen Buchstaben und Zahlen $\mathcal{O}(|w|)$
  - Ersetzen eines Buchstabens gemäß Permutation (Listensuche) $\mathcal{O}(\mathrm{n})$
  - Gesamtaufwand bei festem Alphabet (n klein) ist linear $\mathcal{O}(|w|)$
- **Aufwand für Brute-Force Attacke**
  - Pro Versuch Aufwand $\mathcal{O}(|w|)$ für die Entschlüsselung
  - Anzahl der möglichen Schlüssel ist $n!$
  - Bei mehr als 26 Buchstaben ist die Substitutionschiffre nicht zu brechen
  - Sicher gegen Brute-Force Attacken mit Computern
  - Dennoch ist eine von-Hand Analyse von Schlüsseltexten möglich

Kryptoanalyse der Substitutionschiffre

- **Chiffre bleibt anfällig für statistische Analysen**
  - Substitution ändert Buchstabenhäufigkeit nicht
  - Häufigste Buchstaben sind (deutsch): E, ‘ ‘, N, I, S, R, A, T, D, H, U
  - Es gibt auch häufige Doppel-/Dreifachkombinationen
    - `EN ER CH ND EI DE IN ES TE IE`
    - `EIN ICH NDE DIE UND DER CHE END GEN SCH`
  - Liefert wertvolle Informationen bei Analyse längerer Texte
- **Erzeuge partiellen Klartext und ergänze Lücken**
  - Häufigste Buchstaben und Bi-/Trigramme liefern möglichen Teiltext
  - Menschen können Lücken in unvollständigen Texten oft leicht ergänzen

    ```
    .R.P..ANA..SE IS .UEHSA.
    KRYPTOANALYSE IST MUEHSAM
    ```

  - Computer können erste Vorschläge mit Wörterbüchern erzeugen

Kryptoanalyse der Substitutionschiffre: Beispiel

- **Untersuche den (langen) Chiffretext**

  AZHCIZCVIHZTICHGRIWXTOHRIRHWXVZUIDMPXHWWZOIGZTOHCYGRZHNHTHRIVHKVI
  AHTIEZRIPMHRIHZTHIAHYGZPPRZHRMTOIBZVIMTCHRHTIUHRPXGRHTINHTSHVZOHT

  – Bestimme die Häufigkeit der Buchstaben im Chiffretext

A 3	B 1	C 5	D 1	E 1	F 0	G 5	H 24	I 17
J 0	K 1	L 0	M 4	N 2	O 5	P 5	Q 0	R 12
S 1	T 12	U 2	V 6	W 4	X 4	Y 2	Z 13	` ` 0

- **Versuche Zuordnung der häufigsten Buchstaben**
  – Ordne H I Z R T V den Klartextbuchstaben E, ‘ ‘, N, I, S, R zu
  – Chiffrierung E$\mapsto$H, ‘ ‘$\mapsto$I ist eindeutig, Häufigkeit von Z R T ähnlich
  – Häufigste Bi-/Trigramme (ohne Chiffrierung I des Leerzeichens)

HR 6	HT 6	GR 3	OH 3	RH 3	TO 3	ZH 3
HZT 2	NHT 2	RHT 2	RZH 2	TOH 2		

  – Mit E$\mapsto$H folgt EN$\mapsto$HR oder EN$\mapsto$HT also wahrscheinlich EIN$\mapsto$HZT
  – Folglich ist zu vermuten ER$\mapsto$HR

- **Analyse liefert partiellen Klartext**

  .IE. I.. EIN .E.R ..N.ER RE...I. ....E..I. .IN.E...RIE.ENER .E..
  .EN .IR ..ER EINE .E..I..RIER.N. .I. .N.EREN .ER...REN .EN.E.I.EN

Kryptoanalyse der Substitutionschiffre: Beispiel II

Analysiere partiellen Klartext

Vergleiche mit Chiffretext

```
AZHCIZCVIHZTICHGRIWXTOHRIRHWXVZUIDMPXHWWZOIGZTOHCYGRZHNHTHRIVHKVI
AHTIEZRIPMHRIHZTHIAHYGZPPRZHRMTOIBZVIMTCHRHTIUHRPXGRHTINHTSHVZOHT
```

```
DIES IST EIN SEHR LANGER RELATIV ZUFAELLIG HINGESCHRIEBENER TEXT
DEN WIR FUER EINE DECHIFFRIERUNG MIT UNSEREN VERFAHREN BENOETIGEN
```

– Vermutlich beginnt der Satz mit `DIES`, also A$\mapsto$D, C$\mapsto$S

– Das zweite Wort muß `IST`, daß vierte `SEHR` sein, also V$\mapsto$T, G$\mapsto$H

– Nächste Vermutungen E$\mapsto$W, O$\mapsto$G, Y$\mapsto$C, N$\mapsto$B, S$\mapsto$O, P$\mapsto$F,
M$\mapsto$U, B$\mapsto$M , U$\mapsto$V, X$\mapsto$A, K$\mapsto$X, W$\mapsto$L, D$\mapsto$Z

Polyalphabetische Kryptosysteme

- **Substitutionschiffren sind monoalphabetisch**
  - Jeder Buchstabe wird durch ein festes Symbol des Alphabets ersetzt
- **Polyalphabetische Systeme sind sicherer**
  - Starre Substitution der Buchstaben wird aufgeweicht
  - Buchstaben werden durch verschiedene Symbole des Alphabets ersetzt
  - Position innerhalb eines Textblockes bestimmt die Ersetzung
  - Kryptoanalyse wird schwieriger
- **Unterschiedlich aufwendige Varianten möglich**
  - Vigenere Chiffre: polyalphabetische Verschiebechiffre
    - Schlüsselwort verschiebt Elemente eines Textblocks unterschiedlich
    - Sehr einfache Ver-/Entschlüsselung, leicht zu merkender Schlüssel
  - Polyalphabetische affine Chiffre ebenfalls möglich
    - Spezialfall der affin-linearen Chiffren ↦ Einheit 2.2
  - Polyalphabetische Substitutionschiffren zu aufwendig (Nutzen gering)

Die Vigenere Chiffre

- **Verschiebe Blöcke von m Buchstaben asynchron**
  - Schlüssel verschiebt Elemente eines Buchstabenblocks unterschiedlich
    Aus `INFORMATIK BRAUCHT MATHEMATIK` mit Schlüssel '`A KEY`'
    wird `IMPSOM CMH AAERCGCDJASRIJASSOX` (Letzter Block vervollständigt)
  - Originaltext durch Rückwärtsschieben der Blöcke ermittelbar
- **Programmierung ähnlich zur Verschiebechiffre**
  - Schlüsselwort der Länge m entspricht Zahlentupel $K = (k_1, .., k_m) \in \mathbb{Z}_n^m$
  - (Umgewandelte) Texte werden aufgeteilt in Blöcke der Länge m
  - Ver-/Entschlüsselung durch simultane Addition/Subtraktion modulo n
    - $e_K(x_1, .., x_m) = (x_1 + k_1, .., x_m + k_m) \bmod n$,
    - $d_K(y_1, .., y_m) = (y_1 - k_1, .., y_m - k_m) \bmod n$
- **Anwendungsbeispiel**
  - Schlüssel `"A KEY"` entspricht Zahlentupel `[0;26;10;4;24]`
  - Aus `ENDE UM DREI UHR` $\hat{=}$ [4;13;3;4;26;20;12;26;3;17;4;8;26;20;7;17;26;26;26;26]
    wird [4;12;13;8;23;20;11;9;7;14;4;7;9;24;4;17;25;9;3;23] $\hat{=}$ `EMNIXULJHOEHJYERZJDX`

Berechnungsaufwand der Vigenerechiffre

Ähnlich zur Verschiebechiffre

- **Aufwand für Ver- und Entschlüsselung ist linear**
  - Umwandlung zwischen Buchstaben und Zahlen $\mathcal{O}(|w|)$
  - Verschieben der Zahlenblöcke (Alphabet fest, n klein) $\mathcal{O}(|w|)$
- **Aufwand für Brute Force Attacken ist höher**
  - Pro Versuch Aufwand $\mathcal{O}(|w|)$ für die Entschlüsselung
  - Bei n Symbolen und Blockgröße m gibt es insgesamt n^m Schlüssel ($27^5 = 14.348.907$ im Beispiel)
  - Brute-Force Attacken ab Blockgröße 8 und Verwendung von 62 alphanumerischen Symbolen undurchführbar $62^8 = 2.2 * 10^{14}$
  - **Sicher gegen Brute-Force Attacken mit Computern**
- **Trotzdem nicht sicher**
  - Blockgröße kann bei lange Chiffretexten bestimmt werden
  - Statistische Analysen ermöglichen Ermittlung von Schlüsselteilen

Kryptoanalyse des Vigenere Chiffre

- **Bestimme Blocklänge mit Kasiski Test**
  - Identische Klartextsegmente führen zum gleichen Schlüsseltext-segment, wenn Abstand Vielfaches der Blocklänge ist
  - Suche identische Schlüsselsegmente und bestimme Abstände

    Segment sollte Mindestgröße drei haben und oft auftauchen
  - Blocklänge muß Teiler der Abstände sein
- **Anwendungsbeispiel**

```
NRPOYBVXBBWSJZPHSSSDXHXKCQWIJNUHVDLBQHYD WOQFASMFVFHXAJMB LYAZBVSODIXK
AYSFBSAOJZJORJOZQTFNFVIHCESVDOOHAUBBS OTEPFWBTETSHXUXTDSUJOCESMYYBAFMY
BOCEHFQCZEKFEXXFHIQTESJPYWDEOZ WSSSDDTKSCPQOTHMYXKXAXQFBSPOHBXVVODXKGN
NZBGSASTEHS YVD AQRQTPJNFVFHXERZKOEOXKB DSJIVGLSWVXJXEFVKSXGJMRFWSXQFB
SRSVPTJNIVFHSJDHATFNQHLGKSJWLFLFMYOXLGOQFBSROHXATGRVJPLWBTETFNUHVDLBQH
YD WOQDTEOMYQOFBCMBBWWQVOKXWBVXVXFMYYWSRSVPOBSNE WSADHXXENQVETA ODXSAS
JUBILFMYBBS KTEHXAJHBVXAJXBQJODTEONBXQBXFSWQY KNODFVEOJSBZTAXJBBSFHIQT
ENFVIR SBQAIJQRQAPKNDBQFTNBOPHX JXBZFOMAQOOHAUBOSN
```

  - FBS an Position 73 194 278 320 (Abstände 121 205 247 84 126 42)
  - FMY an Position 137 311 383 425 (Abstände 174 246 288 72 114 42)
  - Erstes FBS vermutlich ein Ausreißer – andere Abstände durch 6 teilbar
  - Wahrscheinliche Blocklänge ist **6**

Kryptoanalyse des Vigenere Chiffre (II)

- **Überprüfe wahrscheinlichste Schlüssel**
  - Bestimme häufigste Buchstaben an jeweils i-ter Position im Block
  - Unter den ersten zwei oder drei ist wahrscheinlich die Codierung von E
  - Teste alle Kombinationen der jeweils zugehörigen Teilschlüssel
    - Bei Blocklänge m sind 2^m bzw. 3^m Schlüssel zu prüfen
    - Falsche Schlüssel sind meist nach wenigen Blöcken identifiziert
- **Analyse des Anwendungsbeispiels**
  - Häufigste zwei Buchstaben an jeweils i-ter Position eines Sechserblocks

    J/O, V/Q, B/X, O/T, S/X, S/N
  - Zugehörige Teilschlüssel: F/K, R/M, Y/T, K/P, O/T, O/J
  - Überprüfung der 64 möglichen Schlüssel auf die ersten 3 Sechserblöcke des Schlüsseltextes liefert als einzig sinnvollen Schlüssel: KRYPTO

Kryptoanalyse mit Koinzidenzanalyse

Aussagekräftige Informationen über lange Texte

- **Vigenerechiffre ist eine Verschiebechiffre**
  - Alle Buchstaben der erste, zweite,... Stelle jedes Blocks werden um dieselbe Konstante verschoben
  - Gleiche Buchstaben werden durch gleiche Buchstaben ersetzt
  - Statistische Eigenschaften der zugehörigen Klar- und Schlüsseltext-fragmente sind identisch
- **Welche statistische Eigenschaft ist gut meßbar?**
  - Häufigkeit konkreter Buchstaben im Klartext kann schwanken
    - Auch in langen Texten kann ein E untypisch selten vorkommen
  - Aber insgesamt dominieren E, ‘ ‘, N, I, S, R, A, T, D, H, U jeden Text
  - Entsprechend müssen manche Symbole den Schlüsseltext dominieren
  - Der Koinzidenzindex ist ein Maß für diese Ungleichverteilung

Kryptoanalyse mit Koinzidenzanalyse

Wie wahrscheinlich ist es, daß zwei beliebige Symbole in einem Text gleich sind?

- **Sollwert für typische Texte ist** $\sum_{i=0}^{26} p_i^2$
  - Summe aller Wahrscheinlichkeiten, daß erstes und zweites Symbol eines beliebigen Textes jeweils der i-te Buchstabe des Alphabets sind

    p_i Wahrscheinlichkeit, daß ein Symbol eines Textes der i-te Buchstabe ist
  - Bei Gleichverteilung: $\sum_{i=0}^{26} p_i^2 = 1/27$ (0.0370) im Deutschen: 0.0762
- **Koinzidenzindex eines konkreten Wortes** w
  - Summe aller Wahrscheinlichkeiten, daß beide Symbole innerhalb von w jeweils der i-te Buchstabe des Alphabets sind
  - Hängt ab von tatsächlicher Häufigkeit der Symbole im Text

    $I_c(w) = \sum_{i=0}^{26} f_i^w(f_i^w - 1) \;/\; |w|(|w|-1)$ (f_i^w Häufigkeit des i-ten Symbols in w)
  - Liegt bei längeren Texten nahe am Sollwert

Bestimme Blocklänge mit Koinzidenzanalyse

- **Bestimme Koinzidenzindizes möglicher Blöcke**
  - Bei richtiger Blockaufteilung sind Koinzidenzindizes der jeweils ersten, zweiten, ... Elemente eines Blocks identisch mit denen des Klartextes
  - Bei falscher Blockaufteilung ist Verteilung der Symbole im zugehörigen Schlüsseltextfragment und der Koinzidenzindex eher untypisch
  - Korrekte Blocklänge führt zu Koinzidenzindizes nahe am Sollwert
  - Überprüfe entsprechende Koinzidenzindizes für Blocklängen $m{=}1, 2, 3, ..$
- **Anwendungsbeispiel**

```
NRPOYBVXBBWSJZPHSSSDXHXKCQWIJNUHVDLBQHYD WOQFASMFVFHXAJMB LYAZBVSODIXK
AYSFBSAOJZJORJOZQTFNFVIHCESVDOOHAUBBS OTEPFWBTETSHXUXTDSUJOCESMYYBAFMY
BOCEHFQCZEKFEXXFHIQTESJPYWDEOZ WSSSDDTKSCPQOTHMYXKXAXQFBSPOHBXVVODXKGN
NZBGSASTEHS YVD AQRQTPJNFVFHXERZKOEOXKB DSJIVGLSWVXJXEFVKSXGJMRFWSXQFB
SRSVPTJNIVFHSJDHATFNQHLGKSJWLFLFMYOXLGOQFBSROHXATGRVJPLWBTETFNUHVDLBQH
YD WOQDTEOMYQOFBCMBBWWQVOKXWBVXVXFMYYWSRSVPOBSNE WSADHXXENQVETA ODXSAS
JUBILFMYBBS KTEHXAJHBVXAJXBQJODTEONBXQBXFSWQY KNODFVEOJSBZTAXJBBSFHIQT
ENFVIR SBQAIJQRQAPKNDBQFTNBOPHX JXBZFOMAQOOHAUBOSN
```

  - Indizes für Blocklängen $1-5$ weichen stark vom Sollwert ab

    .0153; .0543,.0456; .0512,.0490,.0585; .0598,.0438,.0466,.0443; .0517,.0439,.0420,.0460,.0434
  - Blocklänge **6** hat geringe Abweichung: .0619, .0736, .0861, .0606, .0798, .0761

Koinzidenzanalyse am Beispiel

- **Bestimme Schlüssel mit Koinzidenzanalyse**
  - Berechne $\sum_{i=0}^{26} p_i \cdot f_{i+k}^{v} \;/\; |v|$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{27}$ und alle Teilworte v, die sich aus den jeweils ersten, zweiten, ... Elemente des m-Blocks ergeben
  - Bei korrektem Teilschlüssel k sollte dies nahe am Sollwert liegen, da f_{i+k}^{v} die Häufigkeit der tatsächlichen Codierung des i-ten Symbols ist
- **Schlüsselbestimmung mit Koinzidenzanalyse**
  - Beste Werte für mögliche Teilschlüssel liefern
    K .0661, R .0720, Y .0771, P .0678, T .0752, O .0762
  - Entschlüsselung mit Schlüssel KRYPTO liefert folgenden Klartext

```
DAS FOLGENDE IST EIN TEXT ZUR KRYPTOGRAPHIE IM ZWEITEN WELTKRIEG AUS
WIKIPEDIA IM ZWEITEN WELTKRIEG WURDEN MECHANISCHE UND ELEKTROMECHAN
ISCHE KRYPTOGRAPHIESYSTEME ZAHLREICH EINGESETZT AUCH WENN IN BEREICHEN
WO DIES NICHT MOEGLICH WAR WEITERHIN MANUELLE SYSTEME VERWENDET WURDEN
IN DIESER ZEIT WURDEN GROSSE FORTSCHRITTE IN DER MATHEMATISCHEN
KRYPTOGRAPHIE GEMACHT NOTWENDIGERWEISE GESCHAH DIES JEDOCH NUR IM
GEHEIMEN DIE DEUTSCHEN MACHTEN REGEN GEBRAUCH VON EINEM ALS ENIGMA
BEKANNTEN SYSTEM WELCHES DURCH DAS ULTRA SYSTEM GEKNACKT WURDE
```