Kryptographie und Komplexität

Einheit 5.4

Endliche Körper und Elliptische Kurven

1. Endliche Körper
2. Elliptische Kurven über $\mathbb{R}$
3. Elliptische Kurven über $\mathbb{Z}_p$

Schwächen von ElGamal Verfahren über $\mathbb{Z}_p$

Nicht wesentlich besser als RSA

- **Schlüssel müssen sehr groß werden**
  - Faktorisierungsalgorithmen sind auf diskrete Logarithmen übertragbar
  - Schlüssel bis 1024 Bit sind heutzutage angreifbar
  - Wachsende Blockgröße macht Verschlüsselung ineffizient
    - Zeit für Verschlüsselung langer Nachrichten wächst linear
    - Implementierung auf SmartCards nur mit Coprozessor möglich
- **Die besten Angriffe basieren auf Zahlen**
  - Einfache Algorithmen wie Shanks, Pollard ρ und Pohlig-Hellman sind gleich gut für alle Gruppen geeignet
  - Die Index-Calculus Methode und das Zahlkörpersieb benötigen schnelle arithmetische Operationen, um effizient sein zu können
- **Verwende andere Gruppen als Basis für ElGamal**
  - $GF(p^n)$: Endliche Körper mit p^n Elementen
  - $E(p,a,b)$: Punkte einer elliptischen Kurve über $GF(p)$

Körper der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}_p$

- **Für jede Primzahl p ist $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$ ein Körper**
  - $(\mathbb{Z}_p, +_p)$ ist abelsche Gruppe der Ordnung p
  - $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot_p)$ ist abelsche Gruppe der Ordnung $p-1$
  - Das Distributivgesetz gilt für $+_p$ und $\cdot_p$
- **$K[x]$: Polynome über Körper K in Variable x**
  - Ausdrücke der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ..a_1 x + a_0$ mit Koeffizienten a_i und Belegungen der Variablen x aus K
  - n ist der Grad von f ($n = deg\ f$)
  - Monome sind Polynome, für die a_i=0 für alle $i\neq n$ gilt
  - Eine Nullstelle von f ist ein Element $r \in K$ mit $f(r) = 0$
    z.B. hat $f(x) = x^2+1$ über $\mathbb{Q}$ keine Nullstelle, über $\mathbb{Z}_2$ die Nullstelle 1

- **Addition und Multiplikation in $K[x]$**
  - Sei $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ und $g(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$ (o.B.d.A. $n \geq m$)
    - $(f+g)(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$ $\qquad$ $\mathcal{O}(n)$ Additionen
    - $(f \cdot g)(x) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$ mit $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ $\qquad$ $\mathcal{O}(n \cdot m)$ Add./Mult.
  - z.B. ist $(x^2+2x+1)\cdot(x^3-2x^2+2) = x^5-3x^3+4x+2$
- **$(K[x], +, \cdot)$ ist ein Ring mit Division**
  - $(K[x], +)$ ist eine abelsche Gruppe
  - $(K[x], \cdot)$ ist nullteilerfreie abelsche Halbgruppe mit Einselement 1
  - Das Distributivgesetz gilt für $+$ und $\cdot$
  - Division: Für $f, g \in K[x]$ gibt es eindeutige Polynome $q, r \in K[x]$

    mit $f = q \cdot g + r$ und $r=0$ oder $deg\ r < deg\ g$
  - Beweis: Konstruktion durch schriftliche Division $\qquad$ $\mathcal{O}(m \cdot (n-m))$ Ops.
  - Bezeichung: $q = \lfloor f/g \rfloor$, $r = f \bmod g$
  - z.B. $\lfloor x^3-2x^2+2 \;/\; x^2+2 \rfloor = x-2$, $\quad x^3-2x^2+2 \bmod x^2+2 = -2x+6$

Mathematik: Polynomkörper

- **Konstruktion verallgemeinert $\mathbb{Z}_p$**
  - Restklassen modulo eines Ringelements $f \in K[x]$ (anstelle von $p \in \mathbb{Z}$)
  - Ringelement f muß **irreduzibel** sein (anstelle von "p Primzahl")
    d.h. f darf nicht durch ein g mit $deg\ f > deg\ g \geq 1$ teilbar sein
  - z.B. ist $f_1(x) = x^3+1$ reduzibel in $\mathbb{Z}_2[x]$, da $f_1(x) = (x+1)(x^2+x+1)$
  - $h(x) = x^2+x+1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}_2[x]$, da $h \equiv 1 \in \mathbb{Z}_2$, aber für jeden echten Teiler $g(x) = x+a$ der Wert a Nullstelle von h in $\mathbb{Z}_2$ wäre
- **$(K[x]/f, +, \cdot)$ ist Körper mit $|K|^{deg\ f}$ Elementen**
  - $\boldsymbol{g \equiv h \bmod f}$ falls $f \mid g-h$
  - $[g]_f = g+f\cdot K[x] := \{h \mid h \equiv g \bmod f\}$ ist die Restklasse von g modulo f
  - $\boldsymbol{K[x]/f}$ ist die Menge aller Restklassen modulo f
  - $K[x]/f$ ist Körper, da zu jedem $0 \neq g \in K[x]/f$ ein Inverses mit dem erweiterten euklidischen Algorithmus konstruiert werden kann (Folie 15, §2.1)
  - $|K[x]/f| = |K|^{deg\ f}$, weil jedes $[g]_f$ ein h mit $deg\ h < deg\ f$ enthält und die Restklassen dieser Polynome paarweise verschieden sind

MATHEMATIK: POLYNOMKÖRPER DER GRÖSSE p^n

- **Eindeutige Konstruktion möglich**
  - Wähle Körper K mit p Elementen, wobei p Primzahl (z.B. $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$)
  - Bestimme ein irreduzibles Polynom $f \in K[x]$ mit Grad n
  - $\boldsymbol{GF(p^n)} = K[x]/f$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt

    Insbesondere ist $GF(p)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p)$
  - Satz: Für jeden endlichen Körper K gibt es eine Primzahl p sodaß K isomorph zu $GF(p^n)$ für ein n ist
- **Endliche Körper sind zyklisch** (Buchmann, Theorem 3.21.1)
  - Satz: Ist $(K, +, \cdot)$ Körper und $q = |K|$ so ist $(K^*, \cdot)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $q-1$ mit $\varphi(q-1)$ Erzeugern
  - $(GF(p^n), \cdot)$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung p^n-1
  - Für ungerade Primzahlen ist p^n-1 gerade,

    aber für $p{=}2$ kann 2^n-1 eine Primzahl sein

  $\mapsto$ **Konstruktion zyklischer Gruppen mit Primzahlordnung**

Beispiel: Konstruktion von $GF(2^3)$

- **Es gibt 8 Polynome $f(x)=x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$**
  - Polynome mit $a_0=0$ sind teilbar durch $g(x) = x$
  - $f_1(x) = x^3+1$ ist reduzibel, da $f_1(x) = (x+1)(x^2+x+1)$
    $f_2(x) = x^3+x^2+1$ und $f_3(x) = x^3+x+1$ sind irreduzibel ($f_2 \equiv f_3 \equiv 1$)
    $f_4(x) = x^3+x^2+x+1$ ist reduzibel, da $f_4(x) = (x+1)(x^2+1)$
  - f_2 und f_3 sind geeignet als Basis für die Konstruktion
- **Operationen auf Koeffizienten reichen aus**
  - $GF(2^3)$ enthält nur Polynome $g(x) = a_2x^2+a^1x+a_0$ mit $a_i \in \mathbb{Z}_2$
  - Additions- und Multiplikation sind als Bitblockoperationen darstellbar
    z.B. $(x^2+1)\cdot(x^2+x+1) \bmod f_3 \;=\; x^4+x^3+x+1 \bmod f_3 \;=\; x^2+x$
    entspricht `101·111 mod 1011 = 11011 mod 1011 = 110`

·	001	010	011	100	101	110	111
001	001	010	011	100	101	110	111
010	010	100	110	011	001	111	101
011	011	110	101	111	100	001	010
100	100	011	111	110	010	101	001
101	101	001	100	010	111	011	110
110	110	111	001	101	011	010	100
111	111	101	010	001	110	100	011

als Zahl

·	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	3	1	7	5
3	3	6	5	7	4	1	2
4	4	3	7	6	2	5	1
5	5	1	4	2	7	3	6
6	6	7	1	5	3	2	4
7	7	5	2	1	6	4	3

  - Liefert Körper mit Basis $\mathbb{Z}_8^*$ und Nichtstandard-Multiplikation

Eignung endlicher Körper für ElGamal Verfahren

- **$GF(2^n)$ scheint am besten geeignet**
  - Addition und Multiplikation sind effizient implementierbar
  - Ver-/Entschlüsselung nahezu genauso schnell wie in $\mathbb{Z}_p$
- **Sicherheit von $GF(p^n)$ wenig größer als bei $\mathbb{Z}_p$**
  - Wenn 2^n-1 Primzahl ist oder große Primfaktoren enthält, bleibt der Pohlig-Hellman Algorithmus erfolglos
  - Index-Calculus Methode nach wie vor anwendbar $\mathcal{O}(2^{(1+o(1))\cdot n^{1/2}\cdot \log n^{1/2}})$
  - Für festes n, wachsendes p ist das Zahlkörpersieb anwendbar $\mathcal{O}(2^{1.92\cdot n^{1/3}\cdot \log n^{2/3}})$
  - Für festes p, wachsendes n ist Zahlkörpersieb erweiterbar zu Funktionenkörpersieb $\mathcal{O}(2^{1.92\cdot n^{1/3}\cdot \log n^{2/3}})$
  - Bei simultaner Erhöhung verwende Index-Calculus Methode

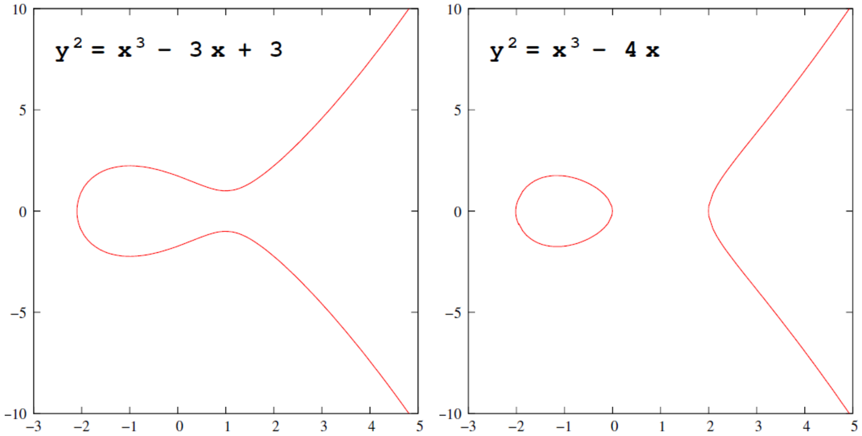
Einfache endliche Körper reichen nicht aus

Elliptische Kurven

- **Begriff der mathematischen Funktionentheorie**
  - Nutzen für Kryptographie enteckt von N. Koblitz und V. Miller
- **Grundlage für effiziente ElGamal Verfahren**
  - Zyklische Gruppe mit relativ effizienten, aber hochgradig unstetigen Additions- und Multiplikationsoperationen
  - Problem diskreter Logarithmen viel schwerer zu lösen als für $GF(p^n)$ 160 Bit Schlüssel sind genauso sicher wie 1024 Bit Schlüssel über $\mathbb{Z}_p$
  - Auch sehr effizient für Signaturverfahren
- **“Komplizierte” Gruppenstruktur**
  - Elemente sind Punkte einer elliptischen Kurve über einem Körper K Motivation entstammt elliptischen Kurven über reellen Zahlen
  - Kryptographische Verfahren verwenden Kurven über endlichen Körpern

ELLIPTISCHE KURVEN ÜBER $\mathbb{R}$

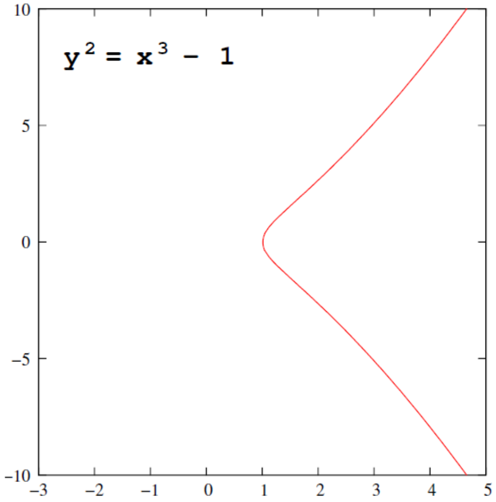
- **Umkehrfunktion elliptischer Integrale**
  – Konzept für die Berechnung der Bogenlänge von Ellipsen
- **Algebraisch: Gleichung dritten Grades über $\mathbb{R}$**
  – Menge $\boldsymbol{E(a,b)}$ der Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ für die $\boldsymbol{y^2 = x^3+a\cdot x+b}$ gilt, zusammen mit einem speziellen Punkt des Unendlichen $\mathcal{O}$
  – **Nichtsinguläre elliptische Kurve**, wenn $4a^3+27b^2\neq 0$ ist

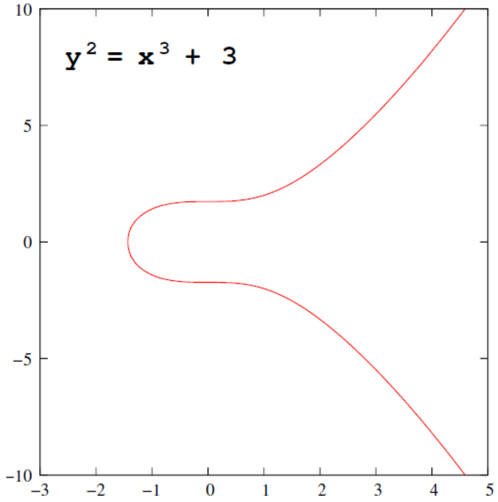


  – Singuläre elliptische Kurven haben weniger als 3 (komplexe) Nullstellen

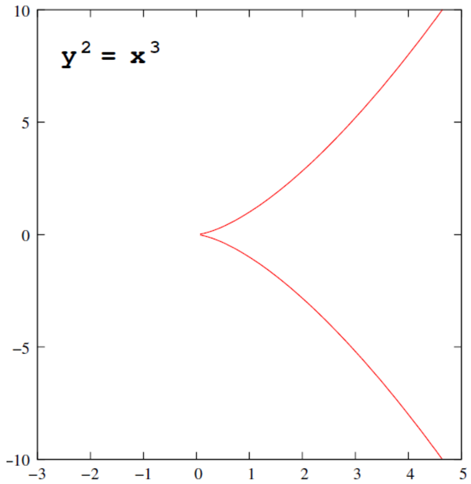
Beispiele Elliptischer Kurven

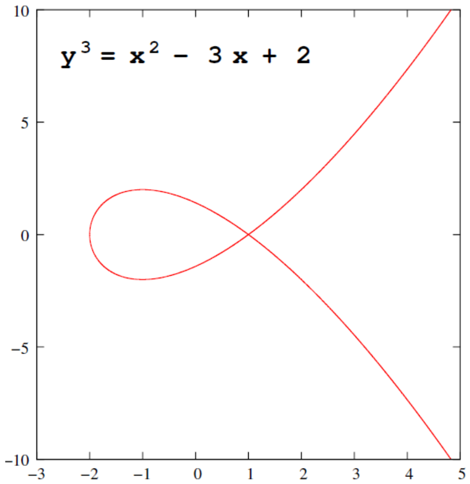
- **Nichtsinguläre Kurven**





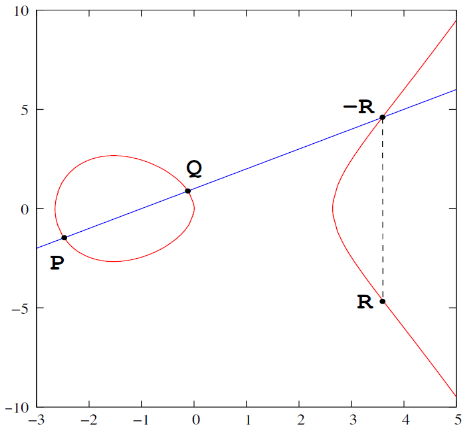
- **Singuläre Kurven**





Die Gruppe der elliptischen Kurven

- **Verknüpfung ist Addition von Punkten**
  - Definiere Addition, skalare Multiplikation und Inverse von Punkten
  - Punkt des Unendlichen $\mathcal{O}$ ist neutrales Element
  - Beweise Gruppeneigenschaften
- **Addition von Punkten, geometrisch**



· Ziehe Gerade durch P und Q

· Bestimme Schnittpunkt $-R$ mit Kurve

· Invertierung der y-Koordinate liefert Ergebnis $R = P+Q$

- **Addition, algebraisch**
  - Beschreibe Konstruktion der Komponenten (x_R, y_R) von R
  - Berücksichtige Sonderfälle $x_P{=}x_Q$ für $P{\neq}Q$ und $P{=}Q$

Addition auf elliptischen Kurven, algebraisch

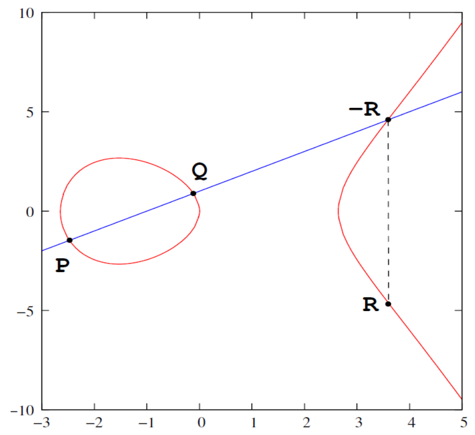
- **Standardsituation $x_P \neq x_Q$**
  - Bestimme Gerade $g(x) = m \cdot x + k$ durch P und Q

    Steigung $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$, Nullwert $k = y_P - m \cdot x_p$
  - Bestimme Schnittpunkt $-R$ mit Kurve

    Löse $(g(x))^2 = x^3 + a \cdot x + b$

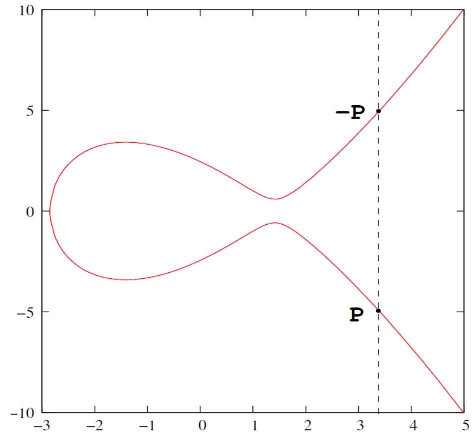
    also $x^3 - m^2 \cdot x^2 + (a - 2m \cdot k) \cdot x + b - k^2 = 0$

    Ergibt nach Einsetzen $x_R = m^2 - x_P - x_Q$ (und $x_R = x_P$ bzw. $x_R = x_Q$)
  - Koordinaten von R sind $(x_R, m \cdot (x_P - x_R) - y_P)$



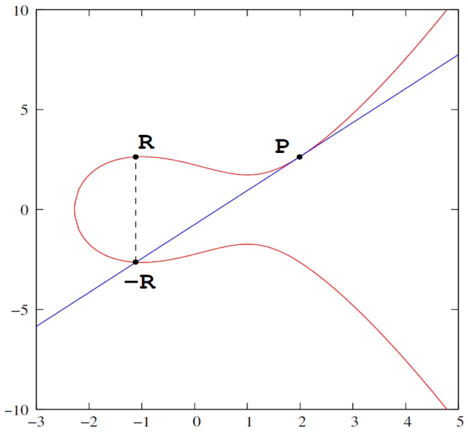
- **Sonderfall $x_P = x_Q$ und $y_P \neq y_Q$**
  - Nach Definition elliptischer Kurven

    muß $y_P = -y_Q$ sein
  - Steigung der Geraden ist unendlich
  - Definiere $P + Q = \mathcal{O}$

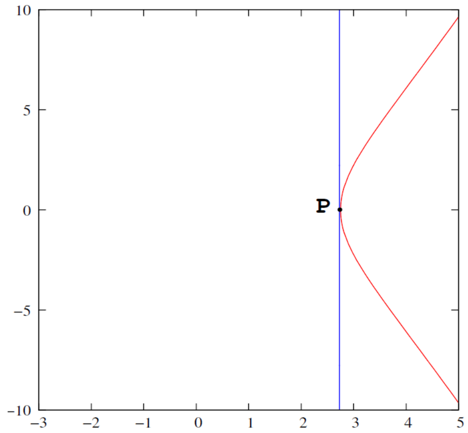


Addition auf elliptischen Kurven (II)

- **Sonderfall $P{=}Q$ (Verdoppelung)**
  - Gerade zwischen P und Q ist Tangente in P
    Löse Tangentengleichung $\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}x^3{+}a{\cdot}x{+}b$
    bzw. $2y{\cdot}\frac{dy}{dx} = 3x^2{+}a$ für den Punkt P
  - Steigung der Geraden in P ist $m = \frac{dy}{dx} == \frac{3x_P^2{+}a}{2y_P}$
  - Koordinaten (x_R, y_R) von R sind wie zuvor
    $x_R = m^2{-}2x_P$ und $y_R = m{\cdot}(x_P{-}x_R){-}y_P$



- **Verdoppelung an Randpunkten**
  - y-Koordinate von P hat den Wert 0
  - Tangente in P hat unendliche Steigung
  - Definiere $P{+}P = \mathcal{O}$



- **Skalare Multiplikation $n{\cdot}P$**
  - Iterierte Addition von P mit sich selbst

Elliptische Kurven bilden eine abelsche Gruppe

- **Abgeschlossenheit von $E(a, b)$ unter Addition**
  - Per Konstruktion ist $P + Q \in E(a, b)$ für alle $P, Q \in E(a, b)$
- **Assoziativität der Addition**
  - Ergibt sich durch Einsetzen der Gleichungen für Addition (mühsam)
- **Kommutativität der Addition**
  - Reihenfolge von P und Q ist irrelevant in geometrischer Konstruktion
- **$\mathcal{O}$ ist neutrales Element der Addition**
  - Gerade zwischen P und $\mathcal{O}$ liefert $-P$ als eindeutigen Schnittpunkt

    (Zeigt warum $P+Q$ nicht einfach der Schnittpunkt der Geraden mit $E(a,b)$ sein darf)
- **Existenz inverser Elemente**
  - Per Konstruktion ist $-P = (x_P, -y_P)$ invers zu P

ELLIPTISCHE KURVEN ÜBER $\mathbb{Z}_p$

- **Kryptographie benötigt endliche Klartexträume**
  – Reale Computer und Smartcards sind endlich
  – Berechnungen müssen schnell und exakt durchgeführt werden können
- **Reelle Zahlen sind ungeeignet**
  – $\mathbb{R}$ ist ein unendlicher (überabzählbar großer) Körper
  – Berechnungen auf “reellen” Zahlen im Computer sind unpräzise
  – Elliptische Kurven müssen über endlichen Körpern definiert werden
- **Übertrage Definitionen auf $\mathbb{Z}_p$ und $GF(p^n)$**
  – $E(p;a,b)$ ist die Menge der Punkte $(x,y)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ für die

  $$y^2 \equiv x^3+a\cdot x+b \bmod p$$

  gilt, zusammen mit einem speziellen Punkt des Unendlichen $\mathcal{O}$,
  wobei $a,b\in\mathbb{Z}_p$ mit $4a^3+27b^2 \bmod p\neq 0$

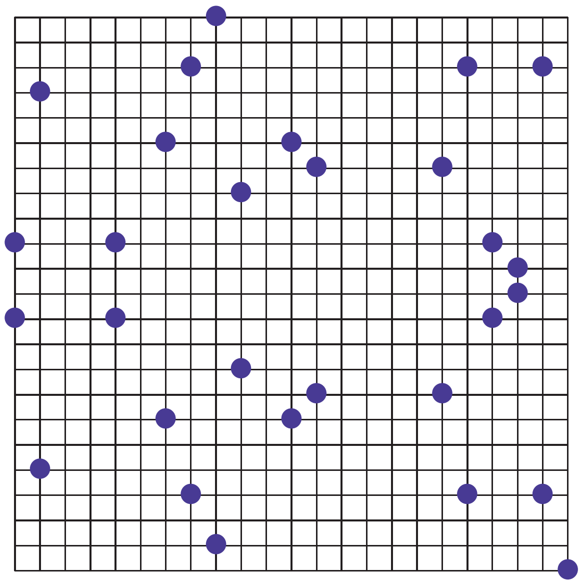
Beispiele elliptischer Kurven über $\mathbb{Z}_p$

- **Elliptische Kurve $y^2 \equiv x^3 + 7 \cdot x + 8 \bmod 23$**

  29 Punkte erfüllen die Gleichung

  (0, 10); (0, 13); (1, 4); (1, 19); (4, 10);
  (4, 13); (6, 6); (6, 17); (7, 3); (7, 20);
  (8, 1); (8, 22); (9, 8); (9, 15); (11, 6);
  (11, 17); (12, 7); (12, 16); (17, 7); (17, 16);
  (18, 3); (18, 20); (19, 10); (19, 13); (20, 11);
  (20, 12); (21, 3); (21, 20); (22, 0)

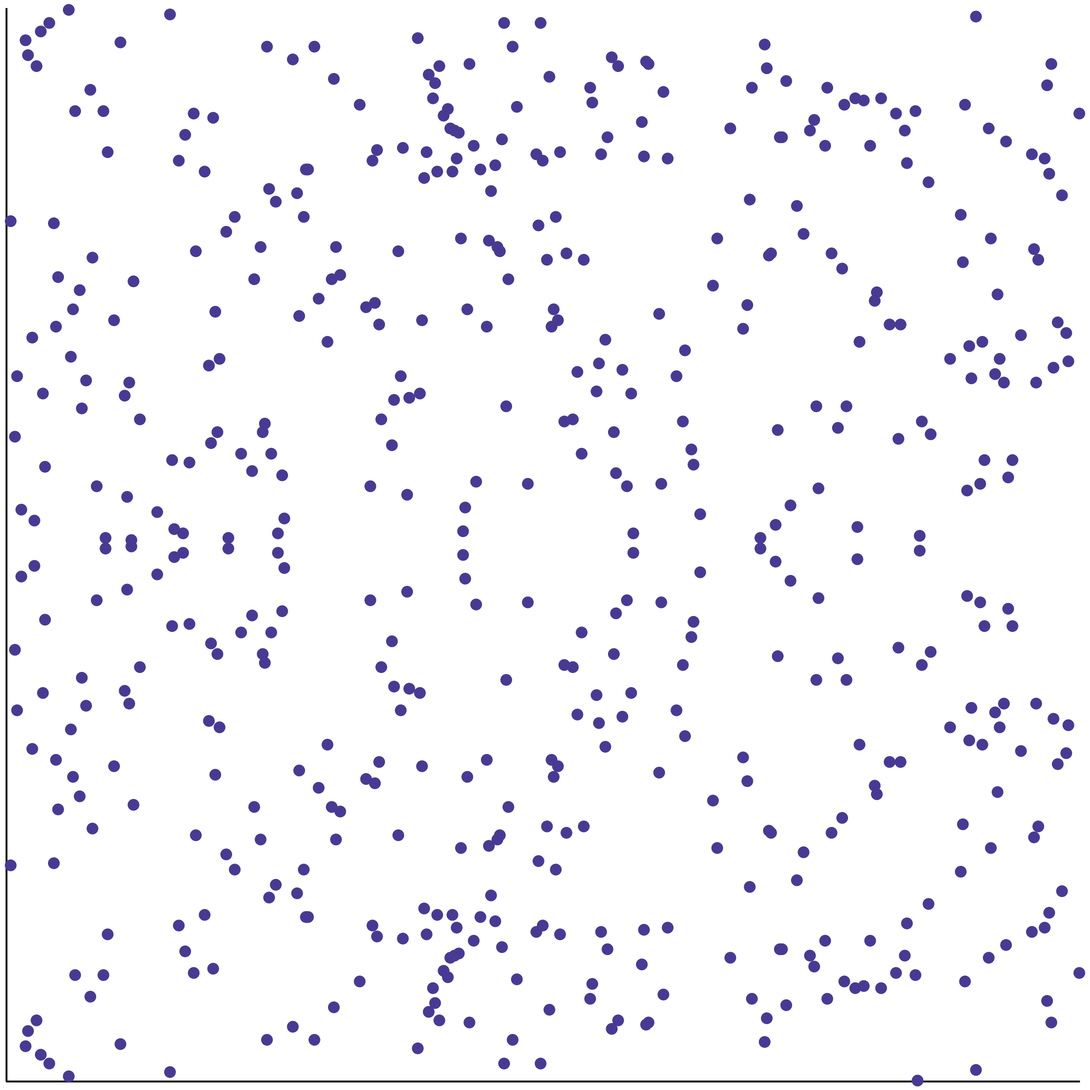
  Wie bei $\mathbb{R}$ maximal zwei Punkte (x, y) und $(x, -y)$ je x-Wert



- **Elliptische Kurve $y^2 \equiv x^3 + 2 \cdot x + 8 \bmod 23$**
  - Nur 15 Punkte erfüllen die Gleichung

  (0, 10); (0, 13); (3, 8); (3, 15); (6, 11); (6, 12); (10, 4); (10, 19);
  (11, 2); (11, 21); (12, 9); (12, 14); (13, 0); (15, 3); (15, 20)

ELLIPTISCHE KURVE $y^2 \equiv x^3 + 2 \cdot x + 8 \bmod 499$ (535 Punkte)



Die Gruppe elliptischer Kurven über $\mathbb{Z}_p$

- **Ähnliche Konstruktion wie bei $\mathbb{R}$**
  - Übertrage Definitionen von Addition, Skalarmultiplikation, Inverse
  - Konstruiere Algorithmen für schnelle Ausführung
  - Beweise Gruppeneigenschaften von $(E(p;a,b),+)$
- **Addition von $P=(x_P,y_P)$ und $Q=(x_Q,y_Q)$**
  - Falls $x_P{=}x_Q$ und $y_P{=}{-}y_Q$, dann ist $P{+}Q=\mathcal{O}$

    Genauso gilt $P{+}P=\mathcal{O}$ (Verdopplung) für $P=(x_P,0)$
  - Ansonsten gilt für die Koordinaten (x_R,y_R) von $R=P{+}Q$

    $x_R=m^2{-}x_P{-}x_Q$ und $y_R=m{\cdot}(x_P{-}x_R){-}y_P$

    wobei $m=\begin{cases}(y_Q{-}y_P)(x_Q{-}x_P)^{-1} & \text{falls } P{\neq}Q\\ (3x_P^2{+}a)(2y_P)^{-1} & \text{sonst}\end{cases}$

    Rechenzeit: $\mathcal{O}(\|p\|^2)$
- **Gruppeneigenschaften gelten wie zuvor**
  - Gleichungen fast identisch mit denen der elliptischen Kurven über $\mathbb{R}$

Addition und Iteration auf $E(23; 2, 8)$

- **Additionstabelle**

	(0, 10)	(0, 13)	(3, 8)	(3, 15)	(6, 11)	(6, 12)	(10, 4)	(10, 19)	(11, 2)	(11, 21)	(12, 9)	(12, 14)	(13, 0)	(15, 3)	(15, 20)
(0, 10)	(3, 15)	$\mathcal{O}$	(0, 13)	(10, 4)	(10, 19)	(12, 9)	(6, 12)	(3, 8)	(15, 3)	(13, 0)	(15, 20)	(6, 11)	(11, 2)	(12, 14)	(11, 21)
(0, 13)	$\mathcal{O}$	(3, 8)	(10, 19)	(0, 10)	(12, 14)	(10, 4)	(3, 15)	(6, 11)	(13, 0)	(15, 20)	(6, 12)	(15, 3)	(11, 21)	(11, 2)	(12, 9)
(3, 8)	(0, 13)	(10, 19)	(6, 11)	$\mathcal{O}$	(15, 3)	(3, 15)	(0, 10)	(12, 14)	(11, 21)	(12, 9)	(10, 4)	(11, 2)	(15, 20)	(13, 0)	(6, 12)
(3, 15)	(10, 4)	(0, 10)	$\mathcal{O}$	(6, 12)	(3, 8)	(15, 20)	(12, 9)	(0, 13)	(12, 14)	(11, 2)	(11, 21)	(10, 19)	(15, 3)	(6, 11)	(13, 0)
(6, 11)	(10, 19)	(12, 14)	(15, 3)	(3, 8)	(13, 0)	$\mathcal{O}$	(0, 13)	(11, 2)	(12, 9)	(10, 4)	(0, 10)	(11, 21)	(6, 12)	(15, 20)	(3, 15)
(6, 12)	(12, 9)	(10, 4)	(3, 15)	(15, 20)	$\mathcal{O}$	(13, 0)	(11, 21)	(0, 10)	(10, 19)	(12, 14)	(11, 2)	(0, 13)	(6, 11)	(3, 8)	(15, 3)
(10, 4)	(6, 12)	(3, 15)	(0, 10)	(12, 9)	(0, 13)	(11, 21)	(15, 20)	$\mathcal{O}$	(6, 11)	(15, 3)	(13, 0)	(3, 8)	(12, 14)	(10, 19)	(11, 2)
(10, 19)	(3, 8)	(6, 11)	(12, 14)	(0, 13)	(11, 2)	(0, 10)	$\mathcal{O}$	(15, 3)	(15, 20)	(6, 12)	(3, 15)	(13, 0)	(12, 9)	(11, 21)	(10, 4)
(11, 2)	(15, 3)	(13, 0)	(11, 21)	(12, 14)	(12, 9)	(10, 19)	(6, 11)	(15, 20)	(3, 15)	$\mathcal{O}$	(3, 8)	(6, 12)	(0, 10)	(10, 4)	(0, 13)
(11, 21)	(13, 0)	(15, 20)	(12, 9)	(11, 2)	(10, 4)	(12, 14)	(15, 3)	(6, 12)	$\mathcal{O}$	(3, 8)	(6, 11)	(3, 15)	(0, 13)	(0, 10)	(10, 19)
(12, 9)	(15, 20)	(6, 12)	(10, 4)	(11, 21)	(0, 10)	(11, 2)	(13, 0)	(3, 15)	(3, 8)	(6, 11)	(15, 3)	$\mathcal{O}$	(10, 19)	(0, 13)	(12, 14)
(12, 14)	(6, 11)	(15, 3)	(11, 2)	(10, 19)	(11, 21)	(0, 13)	(3, 8)	(13, 0)	(6, 12)	(3, 15)	$\mathcal{O}$	(15, 20)	(10, 4)	(12, 9)	(0, 10)
(13, 0)	(11, 2)	(11, 21)	(15, 20)	(15, 3)	(6, 12)	(6, 11)	(12, 14)	(12, 9)	(0, 10)	(0, 13)	(10, 19)	(10, 4)	$\mathcal{O}$	(3, 15)	(3, 8)
(15, 3)	(12, 14)	(11, 2)	(13, 0)	(6, 11)	(15, 20)	(3, 8)	(10, 19)	(11, 21)	(10, 4)	(0, 10)	(0, 13)	(12, 9)	(3, 15)	(6, 12)	$\mathcal{O}$
(15, 20)	(11, 21)	(12, 9)	(6, 12)	(13, 0)	(3, 15)	(15, 3)	(11, 2)	(10, 4)	(0, 13)	(10, 19)	(12, 14)	(0, 10)	(3, 8)	$\mathcal{O}$	(6, 11)

- **Iterierte Addition von $P = (0, 10)$**
  - $P = (0, 10)$, $2P = (3, 15)$, $3P = (10, 4)$, $4P = (6, 12)$, $5P = (12, 9)$, $6P = (15, 20)$, $7P = (11, 21)$, $8P = (13, 0)$, $9P = (11, 2)$, $10P = (15, 3)$, $11P = (12, 14)$, $12P = (6, 11)$, $13P = (10, 19)$, $14P = (3, 8)$, $15P = (0, 13)$, $16P = \mathcal{O}$
  - $E(23; 2, 8)$ ist zyklische Gruppe und P ist ein erzeugendes Element

Struktur elliptischer Kurven über $\mathbb{Z}_p$

- **Wieviele Punkte hat eine elliptische Kurve?**
  - Gruppenordnung ist Zahl der Lösungen von $y^2 = x^3+a{\cdot}x+b$ in $\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$
  - Satz von Hasse: **Für die Ordnung n der Gruppe $E(p;a,b)$ gilt**
    $$p+1-2\sqrt{p} \leq n \leq p+1+2\sqrt{p}$$
    - Für $p{=}23$ liegt die Gruppenordnung von $E(p;a,b)$ zwischen 14 und 33
    - Für $p{=}499$ liegt die Gruppenordnung zwischen 456 und 544
  - Genaue Gruppenordnung berechnet Algorithms von Schoof in $\mathcal{O}(\|p\|^8)$
  - $E(p;a,b)$ ist zyklisch, wenn Ordnung Produkt verschiedener Primzahlen
- **Welche Gruppenstruktur ist zu erwarten?**
  - Satz: **Für Primzahlen $p{>}3$ gibt es $k,m\in\mathbb{N}$ mit $k|m$ und $k|(p-1)$, so daß $(\,E(p;a,b),+\,)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_k$ ist**
  - Die Zahlen k und m können aus p,a,b berechnet werden
  - $E(p;a,b)$ ist zyklisch, wenn $k{=}1$ ist
  - Ansonsten gibt es eine zyklische Untergruppe der Ordnung m

ElGamal Systeme mit elliptischen Kurven

Potenzierung wird skalare Multiplikation

- **Schlüsselerzeugung**
  - Wähle eine zyklische elliptische Kurve $E = E(p; a, b)$ der Ordnung n und einen erzeugenden Punkt P
  - Wähle ein zufälliges $a \in \{0, .., n-1\}$ und berechne $A = a \cdot P$
  - Lege E, P, A offen, halte a geheim
- **Verschlüsselung**
  - Gesamtschlüssel ist $K := (E, P, a, A)$, wobei E, P, A öffentlich
  - Textblöcke der Länge $\log_2 n/8$ werden auf Punkte von E abgebildet
  - Absender wählt zufälliges $b \in \{0, .., n-1\}$ und berechnet $B := b \cdot P$
  - Absender verschlüsselt Punkt X zu $Y := X + b \cdot A$
  - Erzeugter Schlüsseltext ist ein Punktepaar $\boldsymbol{e_K(X, b)} = (B, Y)$
- **Entschlüsselung**
  - Empfänger berechnet $\boldsymbol{d_K(B, Y)} = Y - (a \cdot B)$

Das ElGamal Verfahren am Beispiel

- **Schlüsselerzeugung**
  - Alice wählt $E = E(23; 2, 8)$ (Ordnung 16) und $P = (0, 10)$ als erzeugenden Punkt
  - Alice wählt $a = 6$ und berechnet $A = 6{\cdot}(0, 10) = (15, 20)$
  - Alice veröffentlicht den Schlüssel $K = (\ E(23; 2, 8), (0, 10), (15, 20)\ )$
- **Verschlüsselung**
  - Bob wählt $b = 3$ und berechnet $B = 3{\cdot}(0, 10) = (10, 4)$ und $b{\cdot}A = 3{\cdot}(15, 20) = (3, 15)$
  - Verschlüsselung von $X = (10, 19)$ ergibt $Y = (10, 19) + (3, 15) = (0, 13)$
  - Bob versendet als Schlüsseltext $e_K(X, b) = (B, Y) = (\ (10, 4),\ (0, 13)\ )$
- **Entschlüsselung**
  - Alice berechnet $-(a{\cdot}B) = -6{\cdot}(10, 4) = -(3, 15) = (3, 8)$
  - Entschlüsselung von Y liefert $Y - (a{\cdot}B) = (0, 13) + (3, 8) = (10, 19)$

Schnelle Skalarmultiplikation auf $E(p; a, b)$

- **EC-Verschlüsselung verwendet $\approx 2^{160}$ Punkte**
  - Signifikant weniger als RSA oder ElGamal Systeme über $\mathbb{Z}_q$ / $GF(q^n)$
  - Dennoch wesentlich zu viele für einfache iterative Berechnung von $k{\cdot}P$
  - Rechenzeit muß in der Größenordnung von $\|p\|$ liegen
- **Variante der schnellen Potenzierung für $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n)$**
  - Direkte Übertragung würde Quadrieren durch Verdopplung $P{\mapsto}2{\cdot}P$ und Multiplikation durch Addition von Punkten ersetzen
  - Optimierung nutzt, daß Invertierung auf $E(p; a, b)$ konstante Zeit benötigt (anstelle von $\mathcal{O}(\|n\|^2)$ für $(\mathbb{Z}_n, \cdot_n)$)
- **Verwende Binärdarstellung mit Vorzeichen**
  - Eine Zahl $k \in \mathbb{Z}_n$ wird dargestellt als $k = \sum_{i=0}^{l} a_i 2^i$ mit $a_i \in \{0, 1, -1\}$
  - Bei **NAF-Darstellung** (non-adjacent form) ist von zwei aufeinanderfolgenden Koeffizienten a_i maximal einer 1 oder -1
  - z.B.: Binärdarstellung von 311 ist 256+32+16+4+2+1 = 100110111
    NAF-Darstellung ist 256+64-8-1 = 10100-100-1

Optimierte schnelle Skalarmultiplikation

- **Iterierte Verdoppelung, Addition, Subtraktion**
  - Zur Berechung von $k{\cdot}P$ erzeuge NAF Darstellung $\sum_{i=0}^{l} a_i 2^i$ von k
  - Verdoppele für jedes a_i, addiere/subtrahiere zusätzlich für $a_i{=}1/{-1}$
- **Funktionale Implementierung**

```
let rec ecc_mult point a_list
 = if a_list = [] then 𝒪
     else let a_i::rest = a_list
          and qpoint = ecc_mult (ecc_add point point) rest
          in
          if a_i=1 then ecc_add qpoint point
             else if a_i=0 then qpoint
             else ecc_sub qpoint point
```

- **Laufzeit** $\mathcal{O}(\|p\|^3)$
  - Eine Verdoppelung pro c_i, eine Addition/Subtraktion für $c_i{\neq}0$
  - Insgesamt maximal $2\log_2 k$ Additionen auf $E(p;a,b)$
  - Additionen sind (bis auf konstanten Faktor) genauso schnell wie in $\mathbb{Z}_p$
- **Effekt der Optimierung** **11% schneller**
  - Im statistischen Mittel sind $2/3$ aller Koeffizienten Null (statt $1/2$)
  - Nur $\frac{4}{3}l$ Additionen/Subtraktionen nötig statt $\frac{3}{2}l$ Additionen

Datenkompression

- **EC-Verschlüsselung vergrößert Nachrichten**
  - Punkte von $E(p;a,b)$ werden durch zwei Zahlen in $\mathbb{Z}_p$ dargestellt
  - ElGamal Verschlüsselung verdoppelt Klartext durch DH-Teilschlüssel
  - Schlüsseltext ist etwa vier mal so lang wie ursprünglicher Klartext
- **$E(p;a,b)$ hat maximal $2p$ Punkte**
  - Ist $P=(x_P,y_P)\in E(p;a,b)$ dann ist $-P=(x_P,p-y_P)$ der einzige Punkt mit derselben x Koordinate
  - Da p Primzahl sein muß, ist y_P gerade g.d.w. $p-y_P$ ungerade ist
- **Komprimiere Darstellung von Punkten**
  - Repräsentation von $P=(x_P,y_P)$ ist $(x_P, y_P \bmod 2)$
  - Nur ein Bit mehr als Darstellung von Texten durch Elemente von $\mathbb{Z}_p$
  - Kompression kann effizient invertiert und in die ElGamal Verschlüsselung integriert werden

Integrierte EC-Verschlüsselung

- **Dekompression komprimierter Punkte**
  - Bei Eingabe der Punktkompression (x, y') berechne $z = x^3 + a \cdot x + b$
  - Falls z ein quadratischer Rest modulo p ist berechne $y = \sqrt{z} \bmod p$
  - Wenn $y' \equiv y \bmod 2$ dann gebe (x, y) aus und ansonsten $(x, p-y)$

  - z ist quadratischer Rest modulo p g.d.w. $z^{(p-1)/2} \equiv 1 \bmod p$
  - Wenn $p \equiv 3 \bmod 4$, dann ist $\sqrt{z} = z^{(p+1)/4}$ (vgl. Rabin Verfahren §4.4)

- **Vereinfachtes ECIES Verfahren**

  Komprimierter ECDH Teilschlüssel & verkürzte Nachrichtenchiffre
  - Gegeben zyklische elliptische Kurve $E = E(p; a, b)$ der Ordnung n ein erzeugender Punkt P, ein zufälliges $a \in \{0, .., n-1\}$ und $A = a \cdot P$
  - Schlüssel ist $K := (E, P, a, A, n)$, wobei nur E, P, A, n öffentlich
  - Verschlüsselung: für ein zufälliges $b \in \{0, .., n-1\}$ und ein $x \in \mathbb{Z}_p$ sei

    $\boldsymbol{e_K(X, b)} = (\mathsf{Compress}(b \cdot P), x \cdot x_q \bmod p)$, wobei $b \cdot A = (x_q, y_q)$
  - Entschlüsselung: für einen Schlüsseltext (B, y) sei

    $\boldsymbol{d_K(B, y)} = y \cdot (x_q)^{-1} \bmod p$, wobei $a \cdot \mathsf{DeCompress}(B) = (x_q, y_q)$

ECIES Verfahren am Beispiel

- **Schlüsselerzeugung**
  - Alice wählt $E = E(23; 2, 8)$ (Ordnung 16) und $P = (0, 10)$ als erzeugenden Punkt
  - Alice wählt $a = 6$ und berechnet $A = 6{\cdot}(0, 10) = (15, 20)$
  - Alice veröffentlicht $K = (\ E(23; 2, 8), (0, 10), (15, 20), 16\ )$
- **Verschlüsselung**
  - Bob wählt $b = 3$ und berechnet $B = \mathsf{Compress}(3{\cdot}(0, 10)) = (10, 0)$ und $b{\cdot}A = 3{\cdot}(15, 20) = (3, 15)$
  - Verschlüsselung von $x = 22$ ergibt $y = 22{\cdot}3 \bmod 23 = 20$
  - Bob versendet als Schlüsseltext $e_K(X, b) = (B, y) = (\ (10, 0),\ 20\ )$
- **Entschlüsselung**
  - Alice berechnet $a{\cdot}\mathsf{DeCompress}(B) = 6{\cdot}(10, 4) = (3, 15)$
  - Entschlüsselung von y liefert $20{\cdot}3^{-1} \bmod 23 = 20{\cdot}8 \bmod 23 = 22$

Komplexität von ECIES

- **Korrektheit: Ver-/Entschlüsselung sind invers**
  - Es ist $d_K(B, y) = y{\cdot}(x_q)^{-1} \bmod p$ wobei $x_q = (a{\cdot}\mathsf{DeCompress}(B))_1$
    und $e_K(X, b) = (\mathsf{Compress}(b{\cdot}P), x{\cdot}x_q \bmod p)$ wobei $x_q = (b{\cdot}A)_1$
  - Für beliebige b ist $d_K(e_K(x, b)) = y{\cdot}((a{\cdot}\mathsf{DeCompress}(B))_1)^{-1} \bmod p$
    $= (x{\cdot}(b{\cdot}A)_1 \bmod p){\cdot}(((a{\cdot}\mathsf{DeCompress}(\mathsf{Compress}(b{\cdot}P)))_1)^{-1} \bmod p)$
    $= (x{\cdot}(b{\cdot}a{\cdot}P)_1 \bmod p){\cdot}(((a{\cdot}b{\cdot}P)_1)^{-1} \bmod p) = x$
- **Aufwand für Ver- und Entschlüsselung**
  - Kein Aufwand für Umwandlung zwischen Text und Zahlen (!)
  - Skalarmultiplikation in $E(p; a, b)$ und Multiplikation in $\mathbb{Z}_p$
    für $8|w|/\|n\|$ Blöcke $\mathcal{O}(|w|{\cdot}\|p\|^2)$
  - Schneller als ElGamal über $\mathbb{Z}_p$ wegen Verwendung kleinerer Blöcke
  - Nachrichtenexpansion um Faktor 2

Sicherheit von EC-ElGamal Systemen

- **Standard DL Algorithmen sind universell**
  - Ordnung der Gruppe $E(p;a,b)$ liegt in Größenordnung von p hat aber keinen trivialen Zusammenhang zu p, a und b
  - Shanks und Pollard ρ sind anwendbar, aber zu ineffizient für große p
  - Pohlig-Hellman kann erfolgreich sein, wenn Ordnung von $E(p;a,b)$ nur kleine Primfaktoren hat
- **Index-Calculus Methode nicht anwendbar**
  - EC-Addition führt zu “chaotischen” Sprüngen in $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$
  - Keine einfache Verwendung von “Faktorbasen” möglich
  - Zahlkörpersiebe und ähnliche arithmetisch basierte Methoden können (bisher) nicht übertragen werden
- **Spezielle Methoden greifen nur Sonderfälle an**
  - MOV / Frey-Rück-Methode übertragen ECDLP auf DL Problem für $\mathbb{Z}_{p^k}$ wenn Gruppenordnung n Teiler von $p^k - 1$
  - Zahlentheoretische Methode von Satoh, Araki & Smart überträgt ECDLP auf DL Problem für $\mathbb{Z}_{p^k}$ wenn $n = p$
  - Algebraische Methode von Semaev & Rück

Kryptographisch geeignete elliptische Kurven

- **163 Bit Schlüssel reichen aus**
  - Beste Attacke auf ECC DL hat Laufzeit in $\mathcal{O}(2^{\|n\|/2})$
  - ECC Schlüssel nur doppelt so groß wie bei symmetrischen Verfahren
  - 160 Bit ECC Schlüssel genauso sicher wie 1024 Bit RSA Schlüssel
    224 Bit ECC Schlüssel genauso sicher wie 2048 Bit RSA Schlüssel
    256 Bit ECC Schlüssel genauso sicher wie 3072 Bit RSA Schlüssel
  - Faktor zwischen ECC und RSA wächst mit Schlüssellänge
- **Empfehlungen für Auswahl der Kurven**
  - Gruppenordnung von $E(p; a, b)$ muß Primfaktor größer als 2^{160} haben (Pohlig-Hellman)
  - Kurve darf nicht supersingulär oder anomal sein
    supersingulär: Gruppenordnung Teiler von $p^k - 1$ (Mezenes, Okamoto, VanStone)
    anomal: Gruppenordnung ist p (Satoh, Araki & Smart)
  - Geheimer Schlüssel aus $\{0, .., n-1\}$ muß groß sein (Brute-Force Suche)

ElGamal Verfahren im Rückblick

- **Effizientes Public-Key Kryptosystem**
  - Potenzierung von Elementen einer (beliebigen) zyklischen Gruppe
  - Sicherheit der Schlüssel basiert auf Problem des diskreten Logarithmus
  - Erhöhte semantische Sicherheit durch Randomisierung
  - Nachrichtenexpansion um Faktor 2
- **Effizienter als RSA**
  - Bei 'nichtarithmetischen' Gruppen mit schwerem DL Problem hat die beste Attacke eine Laufzeit von $\mathcal{O}(2^{\|n\|/2})$
  - Schlüssellängen von 160 Bit gelten als sicher
  - Implementierbar auf Smartcards mit geringer Prozessorleistung
  - Elliptische Kurven gelten derzeit die beste Grundlage