

# Das Exponential für M-Set

Eva Richter

10. Juni 2004

Gegeben sei ein Monoid  $M=(m, e, \star)$ . Wir betrachten die Kategorie  $M\text{-Set}$ . Die Objekte der Kategorie sind  $M$ -Mengen, also Paare  $(X, \lambda)$ , wobei  $X$  eine beliebige Menge und  $\lambda$  eine Aktion des Monoids auf  $X$  ist, d.h.  $\lambda : M \times X \rightarrow X$ , die bestimmten Bedingungen genügt, nämlich:

$$\lambda_e(x) = x \text{ und } \lambda_k \circ \lambda_n = \lambda_{k \star n}.$$

Dabei seien für jedes  $k \in M$  die Abbildungen  $\lambda_k : X \rightarrow X$  definiert durch  $\lambda_k(x) = \lambda(k, x)$  für alle  $x \in X$ .

Die Morphismen in  $M\text{-Set}$  sind equivariante Abbildungen  $f : (X, \lambda) \rightarrow (Y, \mu)$ , d.h. für alle  $k \in M$  gilt:

$$f \circ \lambda_k = \mu_k \circ f$$

Für zwei solche  $M$ -Mengen  $(X, \lambda)$  und  $(Y, \mu)$  wollen wir das Exponentialobjekt  $Y^X$ , eine  $M$ -Menge  $(E, \sigma)$ , und die Evaluationsabbildung, eine equivariante Abbildung  $ev : (E, \sigma) \times (X, \lambda) \rightarrow (Y, \mu)$  definieren, sd. für ein beliebiges Objekt  $(Z, \nu)$  alle Pfeile  $g : (Z, \nu) \times (X, \lambda) \rightarrow (Y, \mu)$  ein eindeutig bestimmter Pfeil  $\hat{g} : (Z, \nu) \rightarrow (E, \sigma)$  existiert mit

$$ev \circ (\hat{g} \times id_X) = g \tag{1}$$

## Definition von $Y^X$

Als Trägermenge  $E$  definieren wir:

$$E = \{ \tau = \{ \tau_m \}_{m \in M} \mid \begin{array}{l} \tau_m : X \rightarrow Y, \text{ sd.} \\ \mu_k \circ \tau_m = \tau_{k \star m} \circ \lambda_k, \text{ für alle } k, m \in M \end{array} \} \tag{2}$$

Als Aktion des Monoids definieren wir:

$$\sigma_l(\tau) = \tau' \text{ wobei } \tau'_m = \tau_{m \star l} \tag{3}$$

Wir beweisen das folgende Lemma.

**Lemma 1.** (*Wohldefiniertheit von  $Y^X = (E, \sigma)$* )

1.  $\sigma$  ist tatsächlich eine Monoid-Aktion, d.h.  $\sigma_e(\tau) = \tau$  und  $\sigma_l \circ \sigma_k = \sigma_{l \star k}$ .
2. Für alle  $l \in M, \tau \in E$  gilt:  $\tau' = \sigma_l(\tau) \in E$ .

BEWEIS:

1.  $\sigma_e(\tau) = \sigma_e(\{\tau_m\}) = \{\tau_{m \star e}\} = \{\tau_m\} = \tau$ .  
 Sei  $\tau'' = \sigma_l \circ \sigma_k(\tau)$ , und sei  $\tau' = \sigma_k(\tau)$ . Dann gilt  $\tau_m'' = \tau_{m \star l}' = \tau_{m \star l \star k}$ .  
 Andererseits sei  $\tau''' = \sigma_{l \star k}(\tau)$ , dann ist  $\tau_m''' = \tau_{m \star l \star k}(\tau)$ . Daraus folgt:

$$\sigma_l \circ \sigma_k(\tau) = \tau'' = \tau''' = \sigma_{l \star k}(\tau).$$

2. Sei  $l \in M$  und  $\tau' = \sigma_l(\tau)$ . Zu zeigen ist  $\mu_k \circ \tau_m' = \tau_{k \star m}' \circ \lambda_k$  für alle  $k, m \in M$ . Es gilt:

$$\mu_k \circ \tau_m' = \mu_k \circ \tau_{m \star l} = \tau_{k \star (m \star l)} \circ \lambda_k = \tau_{(k \star m) \star l} \circ \lambda_k = \tau_{k \star m}' \circ \lambda_k.$$

□

## Definition von $ev$

Wir definieren die „Auswertungsfunktion“  $ev : (E, \sigma) \times (X, \lambda) \longrightarrow (Y, \mu)$  des Exponentials durch:

$$ev(\tau, x) = \tau_e(x), \text{ für } \tau \in E, x \in X, e \in M. \quad (4)$$

Es bleibt zu beweisen, daß diese Abbildung equivariant ist und die geforderte Universalitätseigenschaft (1) besitzt.

**Lemma 2.** *Die Funktion  $ev$  ist equivariant.*

BEWEIS: Sei  $\tau \in E$ . Zu zeigen ist, daß  $\mu_n(ev(\tau, x)) = ev(\sigma_n(\tau), \lambda_n(x))$ . Wir haben:

$$ev(\sigma_n(\tau), \lambda_n(x)) = [\sigma_n(\tau)]_e(\lambda_n(x)) = \tau_{e \star n}(\lambda_n(x)) = \tau_n(\lambda_n(x))$$

Da  $\tau \in E$  haben wir  $\tau_n(\lambda_n(x)) = (\mu_n \circ \tau_e)(x)$  und damit

$$ev(\sigma_n(\tau), \lambda_n(x)) = \mu_n(ev(\tau, x)).$$

□

Wir zeigen, daß  $ev$  die geforderte Universalitätseigenschaft besitzt:

**Lemma 3.** *Sei  $(Z, \nu)$  ein Objekt aus  $M$ -Set. Sei  $g : (Z, \nu) \times (X, \lambda) \rightarrow (Y, \mu)$  eine equivariante Abbildung. Dann existiert genau eine equivariante Abbildung  $\hat{g} : (Z, \nu) \rightarrow (E, \sigma)$ , sd. für alle  $x \in X, z \in Z$  gilt:  $g(x, z) = ev(\hat{g}(z), x)$ .*

BEWEIS: Für  $z \in Z$  soll  $\hat{g}(z)$  ein Element aus  $E$  sein, d.h. eine Familie  $\{\tau_m\} : X \rightarrow Y$ . Da die Gleichung (1) erfüllt sein soll, muß gelten:

$$ev(\hat{g}(z), x) = [\hat{g}(z)]_e(x) = g(z, x).$$

Gleichung (1) liefert uns also die  $e$ -Komponente von  $\hat{g}(z)$  für beliebiges  $z \in Z, x \in X$ .

Andererseits muß  $\hat{g} : Z \rightarrow E$  eine equivariante Abbildung sein, d.h. es muß gelten

$$\hat{g}(\nu_n(z)) = \sigma_n(\hat{g}(z))$$

Unter Benutzung von Gleichung (3) bekommen wir:

$$[\sigma_n(\hat{g}(z))]_e = [\hat{g}(z)]_{e \star n} = [\hat{g}(z)]_n.$$

Das liefert die  $n$ -te Komponente von  $\hat{g}(z)$ , nämlich:

$$[\hat{g}(z)]_n = [\hat{g}(\nu_n(z))]_e \tag{5}$$

und damit

$$[\hat{g}(z)]_n(x) = [\hat{g}(\nu_n(z))]_e(x) = g(\nu_n(z), x).$$

Die Eindeutigkeit von  $\hat{g}$  folgt aus der Konstruktion. Das folgende Lemma beweist die Wohldefiniertheit von  $\hat{g}(z)$ .  $\square$

**Lemma 4.** *Für alle  $z \in Z$  ist  $\hat{g}(z) \in E$ .*

BEWEIS: Wir zeigen  $\mu_k \circ [\hat{g}(z)]_m = \hat{g}(z)_{k \star m} \circ \lambda_k$ . Wir benutzen (5) und erhalten

$$\mu_k \circ [\hat{g}(\nu_m(z))]_e(x) = \mu_k \circ g(\nu_m(z), x).$$

$g$  ist equivariant, daher gilt:

$$\mu_k \circ g(\nu_m(z), x) = g(\nu_{k \star m}(z), \lambda_k(x)) = [\hat{g}(z)]_{k \star m}(\lambda_k(x)).$$

$\square$