Tutorium Theoretische Informatik II 5. Mai 2010

Note Title 5/3/2010

- sqrt
- TM mit mehr als einem Band
- maximale Anzahl der Schritte

- $\mathrm{sqrt}(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ die größte natürliche Zahl x mit $x^2 \le n$

1) Rekursionsgleichung aufstellen
2) mit 'Suche' arbeiten (beschränkte Minimierung)

1) $\mathrm{sqrt}(0) = f()$

$\mathrm{sqrt}(n+1) = g(n, \mathrm{sqrt}(n))$

} wie sehen f und g aus?

$sqrt(0) = 0 = f()$

erzeugt 0 ohne Argumente

Einzige bekannte Funktion ist

C_0^0 erzeugt 0 aus 0 Argumente

(sqrt ist einstellig
also f null-stellig
g zweistellig)

C_0^0

C_0^0 ist Grundfunktion also p.r. ("primitiv-rekursiv")

$sqrt(n+1) = ?$ hängt ab von dem Wert von n+1

Beispiel

n	0	1	2	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	5	6	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	9
$sqrt(n)$	0	1	1	$\boxed{1}$	2	2	2	$\boxed{2}$	2	3

Sprung bei Quadratzahl, sonst alter Wert

$$\mathrm{sqrt}(n+1) = \begin{cases} \mathrm{sqrt}(n) & \text{wenn } (\mathrm{sqrt}(n)+1)^2 > n+1 \\ \mathrm{sqrt}(n)+1, & \text{wenn } (\mathrm{sqrt}(n)+1)^2 \leq n+1 \end{cases}$$

$$= g(n, \mathrm{sqrt}(n))$$

also $g(n, y) = \begin{cases} y, & \text{wenn } (y+1)^2 > s(n) \\ y+1, & \text{wenn } (y+1)^2 \leq s(n) \end{cases}$

was ist '$\leq$' ?

Wann ist $m \leq n$?

nur als Hilfsmittel $+$, $\dot{-}$, s
Test auf 0 als Ergebnis

suche $\mathrm{test}(m, n) = \begin{cases} 0 & m \leq n \\ \neq 0 & m > n \end{cases}$ $\qquad \mathrm{test}(m, n) = m \dot{-} n$

also $g(n,y) = \begin{cases} y+1, & \text{wenn } (y+1)^2 \dot{-} s(n) = 0 \\ y & \text{sonst} \end{cases}$

g kann mit p.r. Fallunterscheidung programmiert werden
ist also p.r.

$g(n,y) = \begin{cases} \boxed{S \circ pr_2^2} (n,y), & \text{wenn} \\ \boxed{pr_1^2} (n,y) \end{cases}$

$sub(\, mul(\, s \circ pr_2^2 (n,y), s \circ pr_2^2 (n,y)),$
$s \circ pr_1^2 (n,y))$

test $= \boxed{sub \circ (mul \circ (s \circ pr_2^2, s \circ pr_2^2), s \circ pr_1^2)} (n,y)$

jetzt einsetzen ins Schema der Fallunterscheidung

$$g = \mathrm{add} \circ (\mathrm{mul} \circ (\mathrm{sub} \circ (c_1^2, \mathrm{sign} \circ \mathrm{test}), \boxed{\mathrm{sqpr}_2^2}), \mathrm{mul} \circ (\mathrm{sign} \circ \mathrm{test}), \boxed{pr_1^2}))$$

übernommen von Folie 8 Blatt 5.2 und eingesetzt

2) mit beschränkter Minimierung, Aufgabe wäre

"zeigen Sie, daß sqrt primitiv-rekursiv ist"

Methode: präzises Argument mit bekanntem Wissen, so wenig programmieren wie möglich

sqrt(n) = maximales ~~x~~ mit $x^2 \leq n$

ausdrücken mit minimierung (beschränkt)

= minimales x mit $(x+1)^2 > n$

$(x+1)^2 \geq n+1$

$$= \min\{x \le \overset{g(n)}{n} \mid n+1 \mathbin{\dot-} (x+1)^2 = 0\}$$ falls min existiert

$$\underbrace{n+1 \mathbin{\dot-} (x+1)^2}_{f(n,x)} = 0$$

$n+1$ sonst

nur für vollständiges Schema

$$\text{sqrt} = M_{n_g}[f] \quad \text{mit} \quad g(n) = n \quad \text{also} \quad g = pr^1_1$$

$$f(n,x) = n+1 \mathbin{\dot-} (x+1)^2$$

$$\text{also} \quad f = \text{sub}(s \circ pr^2_1,\ \text{mul}(s \circ pr^2_2,\ s \circ pr^2_2))$$

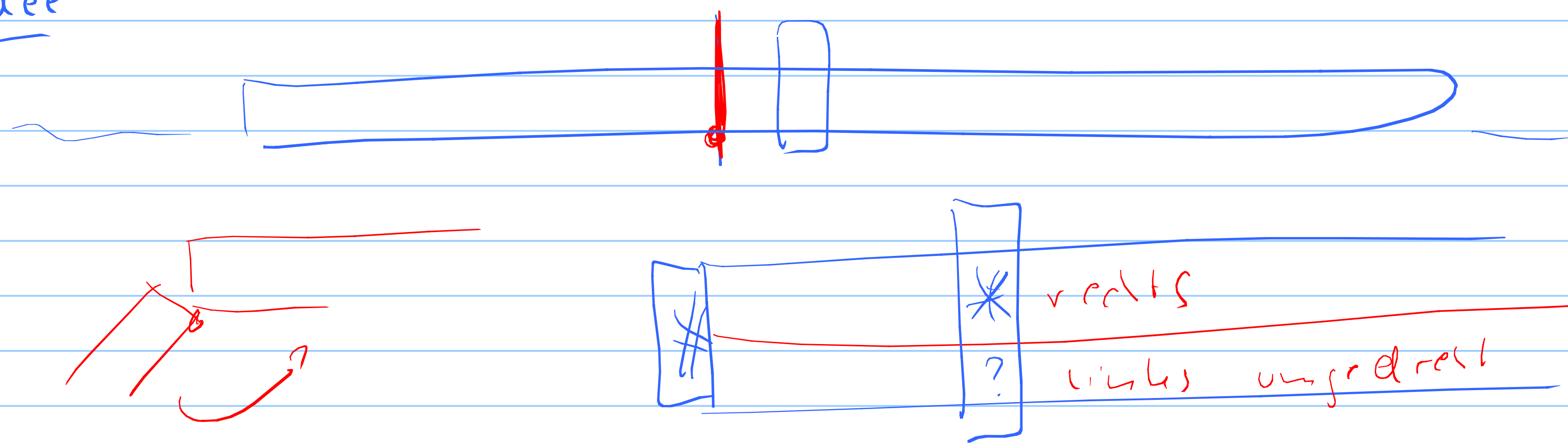
da beschränkte Minimierung p.r. wenn f, g p.r.

ist sqrt p.r.

TM mit mehr als einem Band

<u>1.5</u> jede Funktion f, die von einer TM berechnet werden kann, kann auch von einer TM mit halbseitig unendlichem Band berechnet werden

<u>Idee</u>



TM muß entweder oben oder unten arbeiten

dazu verwende separate Zustände q_i^r q_i^l

Brauche $\Gamma' = (\Gamma \times \Gamma) \cup \{\#\}$ (paare von Bandinhalten)

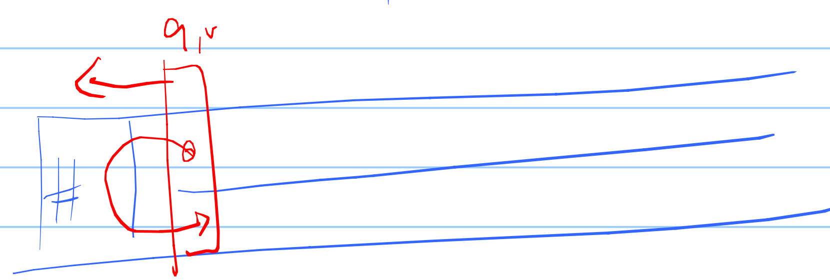
$Q' = Q \times \{l, r\}$

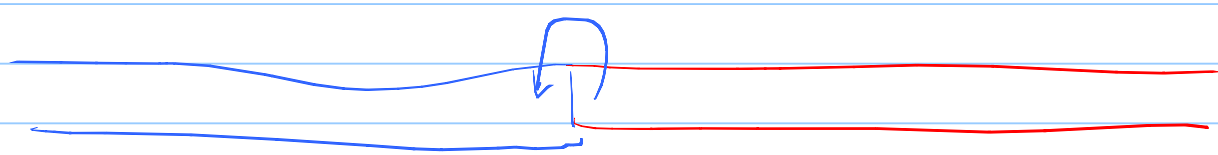
$$\delta'((q,r),(X,Y)) = ((q',r),(Z,Y),\underset{L}{R}) \text{ wenn } \delta(q,X) = (q',Z,\underset{L}{R})$$

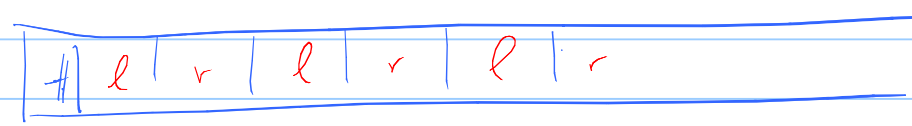
$$\delta'((q,l),(X,Y)) = ((q',l),(X,Z),\underset{R}{L}) \text{ wenn } \delta(q,Y) = (q',Z,\underset{L}{R})$$

$$\delta'((q,r),\#) = ((q,l),\#,R)$$

$$\delta'((q,l),\#) = ((q,r),\#,R)$$



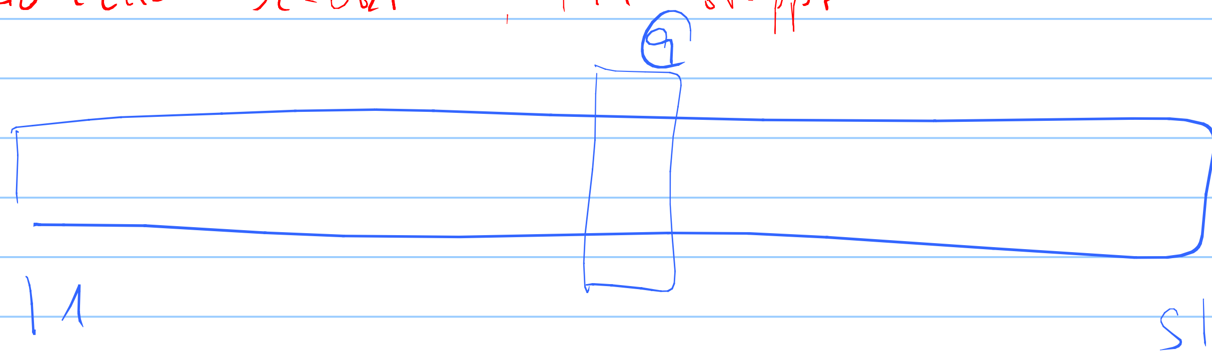




0 = 1B
1 = 11
B = BB

(3) Maximale Anzahl Schritte

S Bandzellen benutzt, TM stoppt



a) Wie viele Konfigurationen sind möglich?
absolute, aber vielleicht nicht wirklich erreichbare Zahl von Schritte

b) wenn TM stoppt, wiederholt sich keine Konfiguration

c) wenn TM dieselbe Konf erreicht, wiederholt sich alles und TM hält nie

mehr nicht möglich

$K = (u, q, v)$ $\quad u, v \in \Gamma^*, \; q \in Q$

besser $K \hat{=}$ Band uv mit $|uv| = S$

+ Kopfposition $\quad i \in \{1..s\}$

+ Zustand $\quad q \in Q$

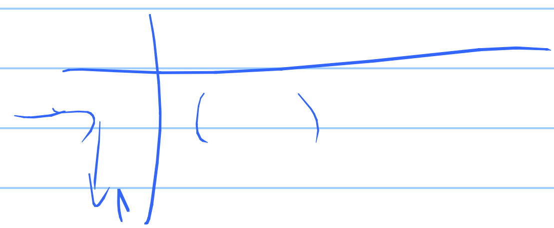
Anzahl $\quad |\Gamma|^s \cdot s \cdot |Q|$

Bandinhalt

Zustand

Kopfposition

Schrittzahl $= |\Gamma|^s \cdot s \cdot |Q| - 1$ maximal



$$2^{|Q|^2 \cdot |\Gamma|^2 \cdot 2}$$