

Tutorium Theoretische Informatik II 2. Juni 2010

Note Title

5/3/2010

- Axiomatische λ -Berechnungstheorie
- Abschlußeigenschaften
- ... unlösbar Probleme

Aufgabe 6.23, Aufzählbar vs Abzählbar

$M_{TR} = \{i \in \mathbb{N} \mid \text{domain}(g_i) = \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ nicht aufzählbar

Beweis

Annahme M_{TR} ist aufzählbar $\leftarrow$ hier ist das Problem

d.h.: (1) Es gibt eine total rekursive Funktion f mit $M_{TR} = \text{range}(f) = \{y \mid \exists x \in \mathbb{N}. f(x) = y\}$

(2) ~~$M_{TR} = \text{domain } g$ für eine λ -Funktion g~~
 ~~$\{i \mid g(i) \text{ definiert}\} = \{i \mid \exists y. g(i) = y\}$~~

klappt nicht
für das was
wir erreichen
wollen

Herleitet Widerspruch

d.h. $M_{TR} = \{ f(0), f(1), f(2), f(3), \dots \}$

d.h. $g_{f(0)}$ ist total, $g_{f(1)}$ ist total usw.

d.h. für alle i, j ist $g_{f(i)}(j) = \underbrace{v \langle f(i), j \rangle}_{\text{definiert}}$

Idee Diagonalbeweis:

$\Rightarrow$ konstruiere neue Funktion h mit $h(j) \neq g_{f(j)}(j)$
 h muss bb sein und total

d.h. $h \neq g_{f(j)}$ für alle j

d.h. $h \neq g_i$ für $i \in M_{TR}$ d.h. $h \notin TR$ $\nexists$

Definiere $h(j) = \underline{g_{f(j)}(j) + 1}$

dann $h(j) = v \langle f(j), j \rangle$ definiert $\leftarrow$

und $h = \lambda j. v \langle f(j), j \rangle$ ist bb und total

weil $f(j) \in M_{TA}$ also $\text{domain}(g_{f(j)}) = N$

also $j \in \text{domain}(g_{f(j)})$ also $g_{f(j)}(j)$ definiert

also $h(j)$ definiert

Per Konstruktion ist $h \neq g_{f(j)}$ für alle j

und weil h beschränkt ist, gibt es ein $u \in M$ mit $h = g_u$

weil h total ist, gilt $u \in M_{TA}$ also $u \in \text{range}(f)$

also $u = f(j)$ für ein j also $h = g_u = g_{f(j)}$ für ein j

M_{TA} kann nicht abzählbar sein



(Durchzahlbar)

Abzahlbarkeit $\equiv$ Mathematik - wie viele Elemente? (gerade Anzahl)

Aufzählbarkeit $\equiv$ Informatik - berechenbare Struktur?

↑

(berechenbar durchzählbar)

Wir betrachte Teilmenge von $\mathbb{N}$ - alles ist abzählbar
was wir ausdehnen

- M ist abzählbar, wenn es eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ gibt
mit $\text{range}(f) = M$, also $\forall x \in M, \exists i \in \mathbb{N}, f(i) = x$

(wenn es eine surjektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach M gibt)

also $M = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$

- $M \subseteq \mathbb{N}$ ist aufzählbar, wenn es eine berechenbare Funktion
 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gibt mit $\text{range}(f) = M$

Beispiel

$$f(i) =$$



~~wenn in Dezimalentwicklung von π
mindestens i hinter dem Komma
Einser vorkommen~~

~~Satz~~

~~M entscheidbar,
aufzählbar,
regulär,
kontextfrei~~

~~$M' \subseteq M$~~

~~$\Rightarrow$~~

~~M' ist } entscheidbar
:
:
:~~

~~$M \cap L \uparrow$~~

Gegeben Beispiel ist immer $M = \Sigma^*$

M' eine nicht entscheidbare Menge - Σ
aufzählbar - Σ, M_{TL}
(kontextfrei)