Tutorium Theoretische Informatik II 30. Juni 2010

Note Title 5/3/2010

- Komplexität, P - NP !

Aufgabe 9.4: Entscheidung für $Clique_k$

$$CLIQUE = \{(G,k) \mid G=(V,E) \text{ Graph und } \exists V_c \subseteq V .\ |V_c| \le k \ \wedge \ \forall u,v \in V_c .\ u \neq v \Rightarrow \{u,v\} \in E\}$$

Größe k

V_c zusammenhängend in G

a) $Clique_k = \{ G \mid G=(V,E)$ Graph und $\exists V_c \subseteq V .\ |V_c| \ge k$ und V_c zusammenhängend in G $\}$

hier ist k von außen fest vorgegeben
der Lösungsalgorithmus wird für festes k gesucht
und die Eingabegröße G ändert sich

b) Entscheidungsverfahren "brute force" Eingabe $G=(V,E)$ mit $|G|=n$

(1) zähle alle Teilmengen $V_c \subseteq V$ auf mit $|V_c| = k$

(2) Teste ob V_c zusammenhängend

(c) Aufwand für Test (2) ist $|V_c|^2/2 \cdot |E| \leq k^2 \cdot n$

wie oft testen wir? $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten $\frac{n!}{(n-k)!\,k!} \leq n^k$

Insgesamt $n^k \cdot (k^2 \cdot n) \in \mathcal{O}(n^{k+1})$

weil k fest ist

10.2 b / 9.5

- L ist NP hart $\Leftrightarrow_{\text{Def}} \forall L' \in NP .\ L' \leq_p L$
- (10.1 b) L' ist in NPC $\Leftrightarrow_{\text{Def}} L' \in NP \wedge \forall L'' \in NP .\ L'' \leq_p L'$
- SAT $\in$ NPC (Satz)

zeige L NP hart $\Leftrightarrow \exists L' \in NPC .\ L' \leq_p L$

L NP hard $\Rightarrow$ $SAT \leq_p L$ weil $SAT \in NP$
und $SAT \in NPC$

$\Rightarrow \exists L' \in NPC.\ L' \leq_p L$

wenn $L' \leq_p L$ für ein $L' \in NPC$ gilt
dann
$\forall L'' \in NP.\ L'' \leq_p L' \leq_p L$

also $\forall L'' \in NP.\ L'' \leq_p L$ wegen Transitivität
d.h.
L ist NP hard

10.2b

$Tauto \leq DNF$ mit $Tauto = \{ F \mid F$ wahr für jede Belegung der Variablen $\}$

$\overline{Tauto} \in NPC$
$\shortparallel$
$\{ F \in DNF \mid$ es gibt Belegung, die F falsch macht $\}$

$\overline{Tauto} \in NP$: rate Belegung, prüfe ob F falsch wird lineare Zeit

$SAT \leq_p \overline{Tauto}$

$SAT = \{ F \in KNF \mid \exists$ Belegung, die F wahr macht$\}$

Idee negiere Eingabeformel

$f(F) = (\neg F)$ konvertiert in DNF

Aufwand: $\neg (K_1 \wedge K_2 \wedge K_3 \dots \wedge K_n)$ Klausel

$\Leftrightarrow (\neg K_1 \vee \neg K_2 \vee \neg K_3 \dots \vee \neg K_n)$ Umwandlung

$\neg (z_1 \vee z_2 \dots \vee z_m)$ Literale

$\Leftrightarrow (\neg z_1 \wedge \neg z_2 \wedge \dots \neg z_m)$ gibt DNF

Rechenzeit? linear

Korrektheit:

$F \in SAT$

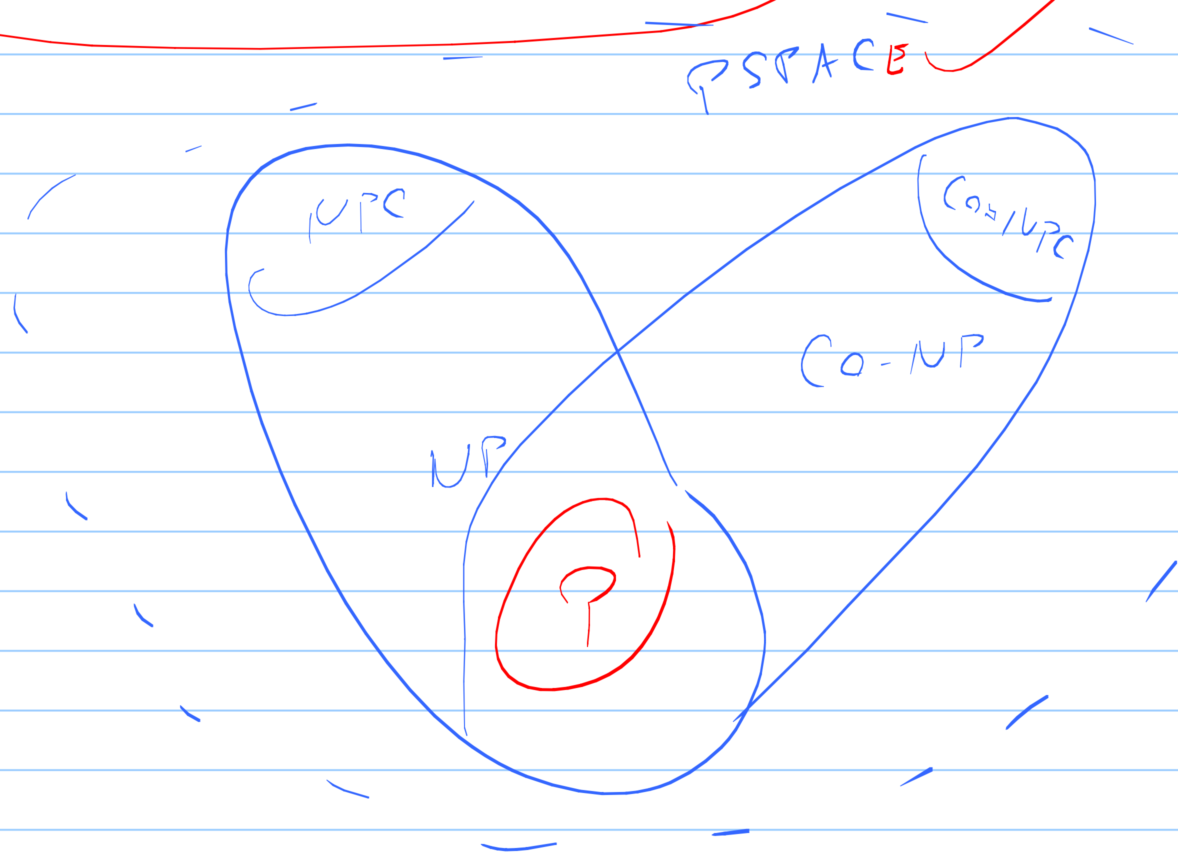
$\Leftrightarrow \exists$ Belegung der Variablen, die F wahr macht

$\Leftrightarrow$ ∃ Belegung, d.h. ¬F falsch macht

$\Leftrightarrow$ $\neg F \in \overline{\text{Tauto}}$

~~analog~~ ~~$\overline{\text{Tauto}}$~~ $\leq_p$ ~~SAT~~ $\in$ ~~NP~~

QBF
≡ 2 Personen
Spiele



9.5 Für jede Funktion t gibt es eine Sprache $L \in ENT$ die nicht in Zeit t entschieden werden kann

erster Ansatz

diagonal über alle Entscheidungsfunktionen gehen die in $O(t)$ halten und akzeptieren (Wert $= 1$)

$\bar{S} = \{ i \mid \varphi_i(i)$ hält nicht $\}$ unentscheidbar
Beweis mit direktem Widerspruch

ähnliche Idee

$L = \{ i \mid \varphi_i(i)$ hält nicht nach $2^{t(i)}$ Schritten
oder
$\varphi_i(i) = 0 \}$

$= \{ i \mid \Phi_i(i) > 2^{t(i)} \vee \varphi_i(i) = 0 \}$
$\{ (i,u) \mid \Phi_i(u) > 2^{t(u)}$

L ist entscheidbar, da Rechenzeit Entscheidbar

Annahme χ_L ist in $O(t)$ berechenbar

d.h. es gibt ein j mit $\chi_L = \varphi_j$ und $\Phi_j(n) \leq c \cdot t(n)$

für alle $n \geq n_0$

für gewisse c, n_0

Wähle $n = j$ dann

$j \in L \iff \Phi_j(j) > 2^{t(j)}$ oder $\varphi_j(j) = 0$

$\iff \Phi_j(j) > 2^{t(j)}$ oder $j \notin L$

$\iff \Phi_j(j) > 2^{t(j)}$

aber per Annahme $\Phi_j(j) \leq c \cdot t(j)$ wenn $j \geq n_0$???

ist garantiert für $\leftarrow$ und $c \cdot t(j) < 2^{t(j)}$???

$t(j) > c$

Modifikation: muß n_e mit in Def von L aufnehmen können

$$L = \{ \langle i, n \rangle \mid \Phi_i(\langle i,n \rangle) \gtrless 2^{t(\langle i,n \rangle)} \vee \varphi_i \langle i,n \rangle = 0 \}$$

noch wie vor entscheidbar

Annahme χ_L in $O(t)$ berechenbar, d.h.

$\exists j.\ \chi_L = \varphi_j$ und $\Phi_j(x) \leq c \cdot t(x)$ für $x \geq n_e$, c

wähle Eingabe

$\langle j, n_0 + x_0 \rangle$ wobei $t(x_0) > c$

$\underline{k = \langle j, n_0 + x_0 \rangle} \in L \iff \Phi_j(k) > 2^{t(k)}$

dann $k \geq n_e$ $\qquad \wedge\ \varphi_j(k) = c$

$\iff \Phi_j(k) > 2^{t(k)}$

<u>aber</u> $\Phi_j(k) \leq c \cdot t(k) < 2^{t(k)}$ per Annahme