Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2010

Blatt 10 — Abgabetermin: 2. Juli 2010, 11.00 Uhr (freiwillig/empfohlen)

Quiz 10

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Die Begriffe "Menge", "Sprache" und "Problem" werden in der Theoretischen Informatik synonym benutzt.

[ ] Die Menge $\mathcal{NP}$ enthält alle Probleme, die <u>n</u>icht in <u>p</u>olynomieller Zeit entschieden werden könnnen.

[ ] Eine Sprache L ist $\mathcal{NP}$-vollständig genau dann, wenn
1. $L \in \mathcal{NP}$ und
2. $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{NP}$ (d.h. L ist $\mathcal{NP}$-hart).

[ ] Ein Sprache L liegt in $\mathcal{NP}$ genau dann, wenn auf Eingabe w ein "Lösungsvorschlag" x in polynomieller Zeit "geraten" werden kann und in polynomieller Zeit verfiziert werden kann, ob x eine "Lösung" für w ist.

[ ] Sei $\mathcal{NPC}$ die Menge der $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme. Für jede entscheidbare Sprache L' gilt $L' \leq_p L$ für ein $L \in \mathcal{NPC}$.

Aufgabe 10.1

(Polynomialzeitreduktion und $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)

a) Zeigen Sie, dass die Polynomialzeitreduktion $\leq_p$ reflexiv und transitiv ist.

b) Zeigen Sie: L ist $\mathcal{NP}$-hart genau dann, wenn $L' \leq_p L$ für ein $L' \in \mathcal{NPC}$.

Aufgabe 10.2

($\texttt{Tauto}$ und $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)

Eine Formel in disjunktiver Normalform (DNF) ist eine Disjunktion von Konjunktionen. Sei $\texttt{DNF}$ die Menge der Formeln in DNF. Sei $\texttt{Tauto} \subseteq \texttt{DNF}$ die Menge der tautologischen Formeln in DNF, d.h. $\texttt{Tauto} = \{F \mid F$ ist aussagenlogische Formel in DNF und F hat den Wert "wahr" für jede Belegung der in F enthaltenen (Aussagen-)Variablen$\}$.

a) Zeigen Sie, dass die folgende aussagenlogische Formel eine Tautologie ist, d.h. $F \in \texttt{Tauto}$: $F \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (\overline{A} \wedge D \wedge C) \vee (\overline{D} \wedge \overline{A}) \vee (\overline{B} \wedge A) \vee \overline{C}$.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $\texttt{Tauto}$ co-$\mathcal{NP}$-vollständig ist, d.h. $\overline{\texttt{Tauto}} \in \mathcal{NPC}$ mit $\overline{\texttt{Tauto}} = \texttt{DNF} \setminus \texttt{Tauto}$.

Hausaufgabe 10.3 *(Polynomialzeitreduktion)*

a) Sei Σ ein Alphabet und $\mathcal{P}$ die Menge der in polynomieller Zeit entscheidbaren Sprachen über Σ. Zeigen Sie, dass $L_1 \leq_p L_2$ für alle $L_1, L_2 \in \mathcal{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}$ gilt.

b) Eine Sprache L sei $\mathcal{P}$-vollständig genau dann, wenn $L \in \mathcal{P}$ und $L' \leq_p L$ für alle $L' \in \mathcal{P}$. Welche Sprachen in $\mathcal{P}$ sind $\mathcal{P}$-vollständig und welche sind es nicht? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 10.4 *($\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)*

Sei Σ ein Alphabet und $\mathcal{NPC}$ die Menge der $\mathcal{NP}$-vollständigen Sprachen.

Zeigen Sie:

a) Falls es ein $L \subseteq \Sigma^*$ gibt mit $L \in \mathcal{P}$ und $L \in \mathcal{NPC}$, dann ist $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

b) Falls es ein $L \subseteq \Sigma^*$ gibt mit $L \notin \mathcal{P}$ und $L \in \mathcal{NPC}$, dann ist $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Hausaufgabe 10.5 *(`2-SAT`)*

Sei `2-SAT` der Spezialfall von `SAT`, bei dem jede Klausel aus genau zwei Literalen besteht.

a) Zeigen Sie, dass die folgende aussagenlogische Formel erfüllbar ist, d.h. $F \in$ `2-SAT`: $F \equiv (A \vee C) \wedge (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee \overline{C}) \wedge (C \vee \overline{A}) \wedge (D \vee E) \wedge (\overline{D} \vee \overline{E})$.

b) Zeigen Sie: `2-SAT` $\in \mathcal{P}$.

Sprechstunden

Sie haben Fragen, Anregungen oder Probleme? Sprechen Sie Ihren Tutor an oder direkt die Veranstalter:

- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.37 bis 16.30 Uhr.
- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Freitag 10.30 bis 11.30 Uhr.
