Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2010

Blatt 11 — Abgabetermin: 9. Juli 2010, 11.00 Uhr (freiwillig/empfohlen)

Quiz 11

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Um zu zeigen, dass `3-SAT` $\mathcal{NP}$-hart ist, wurde gezeigt, dass `SAT` $\leq_p$ `3-SAT`.

[ ] Es gibt Sprachen, die $\mathcal{NP}$-hart sind, aber nicht in $\mathcal{NP}$ liegen.

[ ] Sei `TSP` das Travelling Salesman Problem und `HC` das (ungerichtete) Hamilton'sche Kreis Problem. Dann gilt `HC` $\leq_p$ `TSP` aber nicht `TSP` $\leq_p$ `HC`.

[ ] Sei `GC` das Graph Colouring Problem. Um zu zeigen, dass `GC` $\mathcal{NP}$-hart ist, muss gezeigt werden, dass `3-SAT` $\leq_p$ `GC`.

[ ] Falls $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, dann gibt es keine Sprache in $\mathcal{NP}$, die deterministisch in polynomieller Zeit entscheidbar ist.

Aufgabe 11.1 *(Travelling Salesman ist $\mathcal{NP}$-vollständig)*

Sei `TSP` das Travelling Salesman Problem und `HC` das Hamilton'sche Kreis Problem.

a) Zeigen Sie: `TSP` $\in \mathcal{NP}$.

b) Zeigen Sie, dass `TSP` $\mathcal{NP}$-hart ist. Benutzen Sie zur Reduktion das Hamilton'sche Kreis Problem, d.h. zeigen Sie `HC` $\leq_p$ `TSP`.

Aufgabe 11.2 *(Hierarchie von Komplexitätsklassen)*

Die Komplexitätsklassen $\mathcal{P}$ und $\mathcal{EXP}$ sind die Mengen der Sprachen, die von deterministischen Turingmaschinen mit der Zeitschranke t, mit $t \in \mathcal{O}(n^k)$ bzw. $t \in \mathcal{O}(2^{(n^k)})$ für $k \in I\!N$, entschieden werden können. Die Komplexitätsklassen $\mathcal{LSPACE}$, $\mathcal{PSPACE}$ und $\mathcal{EXPSPACE}$ sind die Mengen der Sprachen, die von deterministischen Turingmaschinen mit der Platzschranke s, mit $s \in \mathcal{O}(\log n)$, $s \in \mathcal{O}(n^k)$ bzw. $s \in \mathcal{O}(2^{(n^k)})$ für $k \in I\!N$, entschieden werden können.

Zeigen Sie:

$$\mathcal{LSPACE} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \mathcal{PSPACE} \subseteq \mathcal{EXP} \subseteq \mathcal{EXPSPACE}$$

Hausaufgabe 11.3 *(Independent Set ist $\mathcal{NP}$-vollständig)*

Sei `Independent` die Menge der Graphen $G = (V, E)$, für die es eine Menge von k Knoten gibt, die nicht durch Kanten miteinander verbunden sind, d.h. `Independent` $= \{(G, k) \mid G = (V, E)$ ist Graph und $\exists V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$ und $\forall u, v \in V'$ ist $\{u, v\} \notin E\}$.

a) Zeigen Sie: `Independent` $\in \mathcal{NP}$.

b) Zeigen Sie, dass `Independent` $\mathcal{NP}$-hart ist, d.h. $L \leq_p$ `Independent` für ein bereits als $\mathcal{NP}$-vollständig nachgewiesenes Problem L.

Hausaufgabe 11.4 *(Das Partitionsproblem ist $\mathcal{NP}$-vollständig)*

Sei `Partition` $= \{(a_1, .., a_n) \mid a_i \in \mathbb{N}$ und $\exists I \subseteq \{1, .., n\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i\}$.

a) Zeigen Sie: `Partition` $\in \mathcal{NP}$.

b) Zeigen Sie, dass `Partition` $\mathcal{NP}$-hart ist, d.h. $L \leq_p$ `Partition` für ein bereits als $\mathcal{NP}$-vollständig nachgewiesenes Problem L.

Hausaufgabe 11.5 *(Gerade Anzahl von Einsen ist $\mathcal{NP}$-vollständig?)*

a) Sei Σ ein Alphabet und $\mathcal{NPC}$ die Menge der $\mathcal{NP}$-vollständigen Probleme. Zeigen Sie:
Falls es ein $L \subseteq \Sigma^*$ mit $L \notin \{\emptyset, \Sigma^*\}$, $L \in \mathcal{P}$ und $L \notin \mathcal{NPC}$ gibt, dann ist $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

b) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Lösung der folgenden Aufgabe würde das $\mathcal{P}$–$\mathcal{NP}$ Problem lösen, d.h. $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ oder $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ zeigen:
Zeigen oder widerlegen Sie: Die Sprache $L = \{w \mid w \in \{0, 1\}^*$ und Anzahl der Einsen in w ist gerade$\}$ ist $\mathcal{NP}$-vollständig.

Sprechstunden

Sie haben Fragen, Anregungen oder Probleme? Sprechen Sie Ihren Tutor an oder direkt die Veranstalter:

- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.37 bis 16.30 Uhr.
- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Freitag 10.30 bis 11.30 Uhr.
