Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2010

Blatt 13 — Abgabetermin: –

Quiz 13

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Es ist bewiesen, dass $co\text{–}\mathcal{P} = \mathcal{P}$ und $co\text{–}\mathcal{NP} = \mathcal{NP}$.

[ ] Es gibt 2-Personen-Spiele, die $\mathcal{PSPACE}$-vollständig sind.

[ ] $\forall x \exists y\, ((P(x) \vee Q(y)) \wedge (P(y) \vee Q(x)))$ ist eine quantifizierte Boole'sche Formel.

[ ] Es gilt $\mathcal{PSPACE} \neq \mathcal{NPSPACE}$.

[ ] Sie haben diese Aussage als falsch (f) markiert.

Aufgabe 13.1 *(Polynomielle Approximation für Traveling-Salesman)*

Beim Traveling-Salesman Problem TSP wird für eine Eingabe $w = (c_{1,2}, \ldots, c_{n-1,n})$ die optimale Rundreise durch n Städte mit minimaler Länge $OPT(w)$ gesucht, d.h. eine Permutation $\pi : \{1, \ldots, n\} \rightarrow \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{i=1}^{n-1} c_{\pi(i),\pi(i+1)} + c_{\pi(n),\pi(1)} = OPT(w)$.

Sei TSP^* das Traveling-Salesman Problem, bei dem zusätzlich die Dreiecksungleichung $c_{i,j} + c_{j,k} \geq c_{i,k}$ sowie $c_{i,j} = c_{j,i}$ gilt, für alle $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Geben Sie einen polynomiellen Approximations-Algorithmus an, der eine Rundreise für eine Eingabe w berechnet, deren Länge $APP(w)$ kleiner als die doppelte Länge der optimalen Lösung $OPT(w)$ ist, d.h. $APP(w) \leq 2 \cdot OPT(w)$. Konstruieren Sie zunächst einen minimal spannenden Baum für den Graphen, der durch w definiert ist. Sei $MST(w)$ die Summe der Kantengewichte des minimal spannenden Baums. Zeigen sie, dass $MST(w) \leq OPT(w)$ gilt. Konstruieren Sie dann aus dem minimal spannenden Baum einen Rundweg der Länge $APP(w)$, so dass $APP(w) \leq 2 \cdot MST(w)$ gilt.

Aufgabe 13.2 *($\mathcal{PSPACE}$-Vollständigkeit von `QBNNF`)*

Sei `QBNNF` die Menge der geschlossenen quantifizierten Boole'schen Formeln in Negationsnormalform, d.h. das Negationszeichen steht nur direkt vor aussagenlogischen Variablen. Zeigen Sie, dass `QBNNF` $\mathcal{PSPACE}$-vollständig ist.

Dies ist eine kleine Auswahl von Aufgaben zur Theoretischen Informatik II. Sie werden voraussichtlich im Rahmen eines Repetitoriums in der Woche vor der Klausur durchgerechnet. Nähere Informationen dazu werden im Web bekanntgegeben.

Aufgabe A.1

(Primitiv- und μ-rekursive Funktionen, λ-Kalkül)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $sum : I\!N \to I\!N$ mit $sum(n) = \sum_{i=1}^{n} i$ primitiv-rekursiv ist. Stellen Sie die entsprechende Rekursionsgleichung auf und geben Sie einen primitiv-rekursiven Ausdruck an, der nur die Grundfunktionen/-operationen verwendet.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $c : I\!N \to I\!N$ mit $c(n) = \lceil \sqrt[3]{n} \rceil$ primitiv-rekursiv ist. Benutzen Sie nur die Grundfunktionen/-operationen und die beschränkte Minimierung.

c) Geben Sie einen λ-Term zur Berechnung der Funktion $f : I\!N \times I\!N \times I\!N \to I\!N$ mit $f(a,b,c) = (a * b) + (a * c)$ an. Berechnen Sie dann den Wert $f(1,1,1)$.

Aufgabe A.2

(Entscheidbarkeit/Aufzählbarkeit, Diagonalisierung, Satz von Rice)

Sind die folgenden Sprachen entscheidbar oder aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $L_1 = \{i \mid \varphi_i(n) \text{ ist Primzahl für ein } n \in I\!N\}$.

b) $L_2 = \{i \mid \varphi_i(i) \text{ ist gerade}\}$.

c) $L_3 = L_1 \cup (L_2 \setminus L_1)$ mit L_1, L_2 aufzählbar, $\overline{L_1}$ endlich und $L_1 \cup \overline{L_2}$ entscheidbar.

Aufgabe A.3

($\mathcal{P}$, $\mathcal{NP}$ und $\mathcal{NP}$-Vollständigkeit)

Sei $\texttt{Partition}^* = \{(a_1,..,a_n) \mid a_i \in I\!N \text{ und } \exists I,J \text{ mit } I \subseteq \{1,..,n\}, J \subseteq I, \text{ so dass } \sum_{i \in I \setminus J} a_i = \sum_{i \notin I} a_i = \sum_{i \in J} a_i\}$. Zeigen Sie: $\texttt{Partition}^* \in \mathcal{P}$ oder $\texttt{Partition}^* \in \mathcal{NPC}$.

Sprechstunden

Sie haben Fragen, Anregungen oder Probleme? Sprechen Sie Ihren Tutor an oder direkt die Veranstalter:

- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.37 bis 16.30 Uhr.
- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Freitag 10.30 bis 11.30 Uhr.
