

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2010

Blatt 2 — Abgabetermin: 7. Mai 2010, 11.00 Uhr (freiwillig/empfohlen)

Quiz 2

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

- [] Die Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn sowohl L als auch \bar{L} semi-entscheidbar sind.
- [] Eine 175-Band Turingmaschine kann mehr Funktionen berechnen als eine Turingmaschine mit nur 174 Bändern.
- [] Falls f berechenbar ist, dann ist $\text{graph}(f) = \{(x, y) \mid f(x) = y\}$ entscheidbar.
- [] Die Vorgängerfunktion $p(n)$ kann durch die Funktion $p = Pr[c_0^0, pr_1^2]$ dargestellt werden.
- [] Turingmaschinen, die primitiv-rekursive Funktionen berechnen, müssen nicht auf allen Eingaben terminieren.

Aufgabe 2.1

(Primitiv-rekursive Funktionen)

Die Funktionen $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ seien definiert durch $f = Pr[c_0^1, add \circ (pr_1^3, pr_3^3)]$ und $g = Pr[c_1^0, mul \circ (s \circ pr_1^2, pr_2^2)]$, wobei add und mul die Funktionen für die Addition bzw. die Multiplikation sind.

- a) Schreiben Sie die Rekursionsgleichungen auf, indem Sie das Definitionsschema der primitiven Rekursion einsetzen.
- b) Berechnen Sie schrittweise durch Auswerten der primitiv-rekursiven Ausdrücke die Werte $f(2, 3)$ und $g(3)$.
- c) Welche Funktionen berechnen f und g .

Aufgabe 2.2

(Primitiv-rekursive Funktionen)

Stellen Sie die folgenden Funktionen im Kalkül der rekursiven Funktionen dar. Geben Sie dazu zunächst die Rekursionsgleichung entsprechend des Definitionsschemas an.

- a) $exp : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $exp(n, m) := n^m$.
- b) $min : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $min(n, m) := m$, falls $n \geq m$, und $min(n, m) := n$, sonst.
- c) $sqrt : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $sqrt(n) := \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Falls möglich, testen Sie Ihre primitiv-rekursiven Funktionen mit dem Program MuRek, das auf der Webseite zum Download bereitsteht.

Hausaufgabe 2.3

(Primitiv-rekursive Funktionen)

Die Funktion f sei definiert durch $f = Pr[c_0^0, add \circ (pr_2^2, s \circ pr_1^2)]$.

- Schreiben Sie die Rekursionsgleichung auf, indem Sie das Definitionsschema der primitiven Rekursion einsetzen.
- Berechnen Sie durch Auswerten des primitiv-rekursiven Ausdrucks den Wert $f(3)$.
- Welche Funktion berechnet f .

Hausaufgabe 2.4

(Primitiv-rekursive Funktionen)

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind. Stellen Sie dazu die Funktionen im Kalkül der rekursiven Funktionen dar (ohne Verwendung des μ -Operators). Geben Sie zunächst die Rekursionsgleichung entsprechend des Definitionsschemas an. Benutzen Sie nur die Grundfunktionen/-operationen auf Folie 3 (§5.2) und die auf Folie 7 (§5.2) definierten Funktionen (d.h. auch ohne beschränkte Minimierung).

- $div : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $div(x, y) := \lfloor x/y \rfloor$ und $y \geq 1$.
- $mod : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ mit $mod(x, y) := x \bmod y$ und $y \geq 1$.

Testen Sie Ihre primitiv-rekursiven Funktionen mit dem Program MuRek.

Hausaufgabe 2.5

(Nichtdeterministische Turingmaschinen)

Sei $L = \{a^{i_1}ba^{i_2}b \dots ba^{i_n}bc^m \mid \exists \{j_1, \dots, j_l\} \subseteq \{1, \dots, n\} : i_{j_1} + \dots + i_{j_l} = m \text{ mit } n, i_1, \dots, i_n \geq 1\}$. Geben Sie eine *nichtdeterministische* 2-Band Turingmaschine mit $|Q| \leq 6$ an, die diese Sprache in der Rechenzeit $|w| + 1$ akzeptiert, wobei $|w|$ die Länge des Eingabewortes ist. Beschreiben Sie zunächst knapp und präzise wie Ihre Turingmaschine funktioniert. Der Kopf des zweiten Bandes darf dabei auch stehen bleiben. Die Übergangsfunktion hat die Form $\delta : Q \times (\Gamma \times \Gamma) \rightarrow Q \times (\Gamma \times \Gamma) \times (\{L, R\} \times \{L, R, N\})$. Schätzen Sie die Rechenzeit einer *deterministischen* Turingmaschine ab, die diese Sprache akzeptiert.

Sprechstunden

Sie haben Fragen, Anregungen oder Probleme? Sprechen Sie Ihren Tutor an oder direkt die Veranstalter:

- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.30 bis 16.30 Uhr.
- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Freitag 10.30 bis 11.30 Uhr.