Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2010

Blatt 3 — Abgabetermin: 14. Mai 2010, 11.00 Uhr (freiwillig/empfohlen)

Quiz 3

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Für die Definition der großen Ackermann-Funktion, kann der μ-Operator durch die beschränkte Minimierung ersetzt werden.

[ ] Jede totale berechenbare Funktion ist primitiv-rekursiv.

[ ] Jede rekursive Funktion lässt sich durch den Ausdruck μf darstellen, wobei f eine primitiv-rekursive Funktion ist.

[ ] Jede 175-stellige rekursive Funktion kann durch eine rekursive Funktion mit nur 174 Stellen simuliert werden.

[ ] Rekursive Funktionen sind nicht primitiv-rekursiv genau dann, wenn sie schneller wachsen als jede primitiv-rekursive Funktion.

Aufgabe 3.1

(μ-rekursive und primitiv-rekursive Funktionen)

a) Welche Funktion wird durch den Ausdruck $\mu[add]$ mit $add(x, y) = x + y$ definiert.

b) Zeigen Sie, dass die folgende Funktion primitiv-rekursiv ist.

$kgV : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ wobei $kgV(x, y)$ das kleinste gemeinsame Vielfache von x und y ist.

Stellen Sie dazu die entsprechenden Gleichungen auf, gegebenfalls unter Verwendung des Gleichungsschemas der primitiven Rekursion. Sie dürfen dabei Funktionen verwenden, die in den Übungen bereits als primitiv-rekursiv bewiesen wurden.

c) Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion der Menge $P = \{p \,|\, p \text{ ist Primzahl}\}$ primitiv-rekursiv ist.

Aufgabe 3.2

(μ-rekursive und primitiv-rekursive Funktionen)

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine primitiv-rekursive, injektive Funktion.

a) Zeigen Sie, dass f^{-1} μ-rekursiv ist.

b) Ist f^{-1} notwendigerweise auch primitiv-rekursiv?

Hausaufgabe 3.3 *(μ-rekursive und primitiv-rekursive Funktionen)*

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen primitiv-rekursiv sind. Stellen Sie unter Benutzung bereits bekannter primitiv-rekursiver Funktionen entsprechende Gleichungen auf.

a) *absdiff*: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit *absdiff*$(x, y) := |x - y|$.

b) *max*: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit *max*$(n, m) := n$, falls $n \geq m$, und *max*$(n, m) = m$, sonst.

c) $ggT : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ wobei $ggT(x, y)$ der größte gemeinsame Teiler von x und y ist.

Hausaufgabe 3.4 *(μ-rekursive und primitiv-rekursive Funktionen)*

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monotone, primitiv-rekursive Funktion. Zeigen Sie, dass auch

$$g(y) = \begin{cases} x & \text{falls es ein } x \text{ mit } f(x) = y \text{ gibt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

primitiv-rekursiv ist.

Hausaufgabe 3.5 *(Ackermann-Funktion)*

Eine alternative Definition der Ackermann-Funktion $A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} A(0, y) &= y + 1 \\ A(x + 1, 0) &= A(x, 1) \\ A(x + 1, y + 1) &= A(x, A(x + 1, y)) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_x(y) := A(x, y)$ primitiv-rekursiv ist. Verwenden Sie dazu eine vollständige Induktion über x.

b) Berechnen Sie $A(2, 6)$, $A(3, 4)$ und $A(4, 2)$.

c) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $A(1, y) = y + 2$.

Sprechstunden

Sie haben Fragen, Anregungen oder Probleme? Sprechen Sie Ihren Tutor an oder direkt die Veranstalter:

- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.30 bis 16.30 Uhr.

- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Freitag 10.30 bis 11.30 Uhr.
