Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2010

Blatt 6 — Abgabetermin: 4. Juni 2010, 11.00 Uhr (freiwillig/empfohlen)

Quiz 6

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Es gilt $\{M \mid M \text{ entscheidbar}\} \subset \{M \mid M \text{ aufzählbar}\} \subset \{M \mid M \text{ abzählbar}\}$.

[ ] Falls M semi-entscheidbar ist, dann gibt es eine berechenbare Funktion f mit $M = \text{domain}(f)$.

[ ] Die Menge $M = \{i \mid \varphi_i(1437) \text{ ist definiert}\}$ ist nicht aufzählbar.

[ ] Es gibt überabzählbar viele Mengen, die nicht aufzählbar sind.

[ ] Jede Teilmenge einer aufzählbaren Menge ist aufzählbar. (Tipp: Werfen Sie einen kurzen Blick auf Folie 4, §5.5.)

Aufgabe 6.1 *(Abschlusseigenschaften aufzählbarer und entscheidbarer Mengen)*

Zeigen Sie durch Argumentation über (Konstruktion von) Turingmaschinen, dass die nachfolgenden Eigenschaften gelten. Es genügt eine knappe und präzise Beschreibung der Arbeitsweise der entsprechenden Turingmaschinen.

a) Falls M_1 und M_2 aufzählbar sind, dann sind auch $M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2$ aufzählbar.

b) Falls M_1 und M_2 entscheidbar sind, dann ist auch das Komplement $\overline{M_1}$ und die Differenz $M_1 \setminus M_2$ entscheidbar.

c) Warum funktioniert die Argumentation für Teil b nicht für aufzählbare Mengen?

Aufgabe 6.2 *(Beweise mit Diagonalisierung)*

Zeigen Sie mit Hilfe von Diagonalisierung, dass die folgenden Sätze gelten.

a) Die Menge $M_{f_{total}} = \{f \mid f : I\!N \to I\!N \text{ mit domain}(f) = I\!N\}$ der totalen Funktionen von den natürlichen Zahlen in die natürlichen Zahlen ist nicht abzählbar.

   Wie ändert sich Ihr Beweis, falls Sie die Menge $M_f = \{f \mid f : I\!N \to I\!N\}$ betrachten.

b) Die Menge $M_{TR} = \{\, i \mid \text{domain}(\varphi_i) = I\!N\}$ der totalen berechenbaren Funktionen ist nicht aufzählbar.

Hausaufgabe 6.3 *(Aufzählbare und entscheidbare Mengen)*

a) Sei $P = \{p \in \mathbb{N} \,|\, p \text{ ist Primzahl}\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie Ihre Antwort.

(1) P ist aufzählbar, aber nicht entscheidbar.
(2) $\overline{P}$ ist nicht entscheidbar.
(3) P und $\overline{P}$ sind aufzählbar.
(4) $\overline{P}$ ist nicht entscheidbar, aber aufzählbar.

b) Seien A, $\overline{B}$ und C aufzählbare Mengen mit $C = \overline{A} \cup B$. Ist dann $A \setminus B$ entscheidbar und/oder aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hausaufgabe 6.4 *(Einfacher Beweis mit Diagonalisierung)*

Zeigen Sie mit Hilfe von Diagonalisierung, dass die folgende Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nicht berechenbar ist.

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_n(n) \text{ undefiniert} \\ \text{undefiniert} & \text{falls } \varphi_n(n) \text{ definiert} \end{cases}$$

Hausaufgabe 6.5 *(Beweise mit Diagonalisierung)*

Zeigen Sie mit Hilfe von Diagonalisierung, dass die folgenden Sätze gelten.

a) Es gibt eine totale, nicht primitiv-rekursive Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die berechenbar ist. (Tipp: Betrachten Sie die Funktion $f(n) := p_n(n) + 1$, wobei p_n die n-te primitiv-rekursive Funktion ist.)

b) Es gibt unendlich viele totale, nicht primitiv-rekursive Funktionen $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die berechenbar sind. (Tipp: Konstruieren Sie aus f in Teil a eine Menge $\{f_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$.)

Sprechstunden

Sie haben Fragen, Anregungen oder Probleme? Sprechen Sie Ihren Tutor an oder direkt die Veranstalter:

- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.30 bis 16.30 Uhr.
- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Freitag 10.30 bis 11.30 Uhr.
