Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2010

Blatt 7 — Abgabetermin: 11. Juni 2010, 11.00 Uhr (freiwillig/empfohlen)

Quiz 7

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Von keinem Programm kann automatisch entschieden werden, ob es auf einer bestimmten Eingabe terminiert.

[ ] Die "Lazy Beaver" Funktion $LB(n) = \min\{\text{Produktivität}(M) \mid M \in BBT(n)\}$ ist nicht berechenbar.

[ ] Der Definitionsbereich einer beliebigen berechenbaren Funktion ist nicht entscheidbar.

[ ] Die Unentscheidbarkeit des Halteproblems kann nur durch einen Beweis mit Diagonalisierug bewiesen werden.

[ ] Der Satz von Rice besagt, dass die Menge $M = \{i \mid \varphi_i \in S\}$ mit $S \neq \emptyset$ und $S \subset \mathcal{R}$ nicht entscheidbar ist, wobei $\mathcal{R}$ die Menge der berechenbaren Funktionen ist.

Aufgabe 7.1 *(Reduktionen)*

a) Sei $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 100 \text{ und } x \text{ ist ungerade}\}$ und $Q = \{x \in \mathbb{N} \mid x > 0 \text{ und } x \text{ ist gerade}\}$. Reduzieren Sie Q auf P, d.h. zeigen Sie, dass $Q \leq P$ gilt.

b) Zeigen Sie durch Reduktion, dass das Halteproblem $H = \{\langle i, n\rangle \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ nicht entscheidbar ist.

c) Zeigen Sie, dass die Reduktions-Relation "$\leq$" reflexiv und transitiv ist.

Aufgabe 7.2 *(Diagonalisierung, Satz von Rice)*

Zeigen Sie mit Hilfe von Diagonalisierung bzw. des Satzes von Rice, dass die folgenden Aussagen gelten.

a) Die Menge $N = \{i \mid \varphi_i = id\}$ mit der Identitätsfunktion id ist nicht entscheidbar.

b) Das Halteproblem $H = \{\langle i, n\rangle \mid n \in \text{domain}(\varphi_i)\}$ ist nicht entscheidbar.

c) Die Menge $M = \{i \mid \varphi_i(3) \leq 100 \text{ oder } \varphi_i(3) \text{ ist undefiniert}\}$ ist nicht aufzählbar.

Hausaufgabe 7.3 *(Menge der Turingmaschinen nicht aufzählbar?)*

Wir zeigen: Die Menge der Turingmaschinen $TM = \{i \mid \varphi_i \in \mathcal{R}\}$ ist nicht aufzählbar. Annahme: TM sei aufzählbar. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert als $f(x) = \varphi_x(x) + 1$. Da TM aufzählbar ist, gibt es eine Turingmaschine, die auf Eingabe x die entsprechende Turingmaschine mit der Gödelnummer x konstruiert und $\varphi_x(x)$ berechnet. Da φ_x berechenbar ist und die Addition ebenfalls, ist auch f berechenbar. Dann gibt es ein $j \in TM$ mit $f = \varphi_j$. Wir betrachten das Verhalten von f an der Stelle j. Dann ist $\varphi_j(j) = f(j) = \varphi_j(j) + 1$. Dies ist ein Widerspruch. Also ist die Annahme falsch und die Menge der Turingmaschinen TM ist nicht aufzählbar.

Zeigen und begründen Sie, an welcher Stelle der "Beweis" einen Fehler enthält.

Hausaufgabe 7.4 *(Reduktion, Diagonalisierung, Satz von Rice)*

Zeigen Sie mit Hilfe von Reduktion, Diagonalisierung bzw. des Satzes von Rice, dass die folgenden Aussagen gelten.

a) Die Menge $T = \{i \mid \varphi_{i \dot{-} 100}(i \dot{-} 100) \text{ ist undefiniert}\}$ ist nicht aufzählbar.

b) Die Menge $U = \{i \mid \varphi_i \text{ ist surjektiv}\}$ ist nicht entscheidbar.

c) Die Menge $V = \{i \mid \varphi_i(i) = i\}$ ist nicht entscheidbar, aber aufzählbar.

Hausaufgabe 7.5 *("Fleißige Biene")*

Bienen fliegen von Blume zu Blume und sammeln Nektar. Fleißige Bienen fliegen weiter als weniger fleißige Bienen. Die Produktivität einer fleißigen Biene ist der größte Abstand zwischen zwei angeflogenen Blumen. Eine *fleißige Biene* ist eine Turingmaschine M_{Bee}=$(\{q_1, ..., q_n, q_e\}, \{\}, \{*, B\}, \delta, q_0, B, \{\})$ mit n Zuständen plus einem expliziten Endzustand q_e, deren Bandalphabet die Symbole B (das Leerzeichen) und $*$ (eine Blume) enthält. Die Produktivität von M_{Bee}, angesetzt auf das leere Band, ist der größte Abstand zwischen zwei Blumen $*$ der Ausgabe, inklusive dieser Blumen. Sie ist 0, falls M_{Bee} nicht anhält. Zum Beispiel ist die Produktivität von M_{Bee}, die $*B**B*BB*$ auf das Band schreibt, gleich 9.

a) Schreiben Sie eine "fleißige Biene" mit zwei und vier Zuständen (plus Endzustand), deren Produktivität möglichst groß ist. Ihre fleißige Biene darf nicht gleichzeitig eine "Busy Beaver"-Turingmaschine sein, d.h. die Ausgabe Ihrer Turingmaschine mit zwei bzw. vier Zuständen darf keine 4 bzw. 13 Blumen enthalten.

b) Geben Sie eine möglichst große untere Schranke für die Produktivität einer fleißigen Biene an. Betrachten Sie ein anderes fleißiges Tier (Tipp: der Name fängt auch mit "B" an).

Auf der Webseite finden Sie das Rahmenprogramm der "Fleißigen Biene"-Turingmaschine. Senden Sie dieses Programm mit den von Ihnen eingefügten (und getesteten) Übergangsfunktionen bis zum 18. Juni 2010 per Email an Ihren Tutor.

Sprechstunden: Zu den gewohnten Zeiten (siehe z.B. Übungsblatt 6).
