

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2010

Blatt 8 — Abgabetermin: 18. Juni 2010, 11.00 Uhr (freiwillig/empfohlen)

Quiz 8

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

- [] Die Menge der Turingmaschinen, die streng monotone Funktionen berechnen, ist nicht entscheidbar.
- [] Das Komplement \overline{PKP} des Post'schen Korrespondenzproblems ist aufzählbar.
- [] Die Menge $\{(G_1, G_2) \mid L(G_1) = L(G_2)\}$ für kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2 ist nicht entscheidbar.
- [] Falls $A \leq B$ und B nicht entscheidbar ist, dann ist auch A nicht entscheidbar.
- [] Falls ein Rechner zur Lösung eines bestimmten Problems für die Eingabelänge n genau 10^n Rechenschritte benötigt, dann kann ein 100.000-mal schnellerer Rechner innerhalb der gleichen Zeit Eingaben der Länge $n + 5$ dieses Problems lösen.

Aufgabe 8.1*(Post'sches Korrespondenzproblem)*

Sei Σ ein endliches Alphabet. Das Post'sche Korrespondenzproblem ist definiert als $PKP = \{(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k) \mid u_i, v_i \in \Sigma^+ \text{ und } \exists i_1, \dots, i_n \text{ mit } n \geq 1, \text{ so dass } u_{i_1} \dots u_{i_n} = v_{i_1} \dots v_{i_n}\}$. Das modifizierte Post'sche Korrespondenzproblem ist definiert als: $MPKP = \{(u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k) \mid u_i, v_i \in \Sigma^+ \text{ und } \exists i_2, \dots, i_n \text{ mit } n \geq 1, \text{ so dass } u_1 u_{i_2} \dots u_{i_n} = v_1 v_{i_2} \dots v_{i_n}\}$.

- a) Sei $K_1 = ((01, 001), (0, 1), (01, 10), (101, 0), (101, 1011))$ und $K_2 = ((101, 10), (1, 01), (010, 10), (10, 0))$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: $K_1 \in PKP$, $K_1 \in MPKP$, $K_2 \in PKP$, $K_2 \in MPKP$.
- b) Zeigen Sie $MPKP \subseteq PKP$.
- c) Zeigen Sie, dass PKP auf $MPKP$ reduzierbar ist, d.h. $PKP \leq MPKP$.

Aufgabe 8.2*(Wachstumsordnungen von Funktionen)*

- a) Ordnen Sie die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nach ihrem Wachstumsverhalten: $f_1(n) = n$, $f_2(n) = n \log n$, $f_3(n) = n - n^3 + n^5$, $f_4(n) = \sqrt{n}$, $f_5(n) = 3^n$, $f_6(n) = n!$, $f_7(n) = n^{1.5}$, $f_8(n) = n^2 + \log n$, $f_9(n) = e^n$, $f_{10}(n) = \log(\log n)$, $f_{11}(n) = n^5$.
- b) Sei $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(n) = 10n^3 + 1437n^2 + 10n + 12$ und $g(n) = n^3$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{O}(g)$ gilt.
- c) Sei $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(n) = \log_a(n)$ und $g(n) = \log_b(n)$ mit $a, b > 1$. Zeigen Sie, dass $f \in \Theta(g)$ gilt.

Hausaufgabe 8.3*(Problemreduktionen)*

Sei A ein Alphabet und D die Menge der entscheidbaren Probleme/Mengen über A . Zeigen Sie, dass $M_1 \leq M_2$ für alle $M_1, M_2 \in D \setminus \{\emptyset, A^*\}$ gilt.

Hausaufgabe 8.4*(Post'sches Korrespondenzproblem)*

Sei M^*PKP das wie folgt modifizierte Post'sche Korrespondenzproblem:

$$M^*PKP = \{((u_1, v_1), \dots, (u_k, v_k), w) \mid u_i, v_i, w \in \Sigma^+ \text{ und } \exists i_1, \dots, i_n, \text{ so dass } wu_{i_1} \dots u_{i_n} = v_{i_1} \dots v_{i_n}\}.$$

Zeigen Sie: $PKP \leq M^*PKP \leq MPKP$.

Hausaufgabe 8.5*(Wachstumsordnungen von Funktionen)*

a) Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(n) = \sum_{m=1}^{n^2} m^3 (\log m)^2.$$

Geben Sie die Wachstumsklasse $\Theta(f)$ der Funktion f in Ihrer einfachsten Form an.

b) Geben Sie zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ an, so dass $f \notin \mathcal{O}(g)$ und $g \notin \mathcal{O}(f)$.

c) Sei $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in \Theta(g)$. Zeigen Sie, dass dann $g \in \Theta(f)$ gilt.

Erinnerung – Hausaufgabe 7.5

Denken Sie daran, Ihre "Fleißige Biene"-Turingmaschinen (Hausaufgabe 7.5) bis zum 18. Juni per Email an Ihren Tutor zu senden.

Sprechstunden

Sie haben Fragen, Anregungen oder Probleme? Sprechen Sie Ihren Tutor an oder direkt die Veranstalter:

- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.30 bis 16.30 Uhr.
- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Freitag 10.30 bis 11.30 Uhr.