Übung zur Vorlesung

Theoretische Informatik II

Prof. Christoph Kreitz / Jens Otten

Universität Potsdam, Theoretische Informatik — Sommersemester 2010

Blatt 9 — Abgabetermin: 25. Juni 2010, 11.00 Uhr (freiwillig/empfohlen)

Quiz 9

Markieren Sie die nachfolgenden Aussagen als wahr (w) oder falsch (f).

[ ] Es kann in linearer Zeit entschieden werden, ob eine Liste von natürlichen Zahlen geordnet ist.

[ ] Das Bubblesort-Verfahren zum Sortieren einer Liste hat eine Zeitkomplexität von $\mathcal{O}(n\,log\,n)$.

[ ] Ein Hamilton'scher Kreis in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kreis, der jede Kante aus E genau einmal enthält.

[ ] Jedes Sortierverfahren hat eine Zeitkomplexität von $\Omega(n\,log_{42}\,n)$.

[ ] Die Sprache/Menge $L = \{a^m b^m \mid m \in I\!N\}$ hat die Zeitkomplexität $\mathcal{O}(1437^n)$.

Aufgabe 9.1 *(Komplexität von Sortierverfahren)*

a) Geben Sie ein Sortierverfahren an, das n natürliche Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in I\!N$ sortiert, mit $k_{min} \leq x_i \leq k_{max}$ für alle $1 \leq i \leq n$ und feste $k_{min}, k_{max} \in I\!N$, und eine Zeitkomplexität von $\mathcal{O}(n + (k_{max} - k_{min}))$ hat.

b) Wie groß ist die Platzkomplexität Ihres Verfahrens? Ist dies ein geeignetes Sortierverfahren für große Zahlen, falls nur die Einschränkung $k_{min} \leq x_i$ gemacht wird?

Aufgabe 9.2 *(Komplexität von Graphenalgorithmen)*

a) Sei `Kreis` die Menge aller (ungerichteten) Graphen, die einen Kreis enthalten. Geben Sie eine formale Beschreibung des Problems in der Form `Kreis`$= \{(V, E) \mid \ldots\}$ an.

b) Geben Sie eine knappe und präzise Beschreibung eines Entscheidungsverfahren für die Menge `Kreis` an, das eine Zeitkomplexität von $\mathcal{O}(n^k)$ für $k \in I\!N$ und Eingabelänge n hat.

c) Ein Euler'scher Kreis in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kreis, der jede Kante aus E genau einmal enthält. Sei `Euler` die Menge aller (ungerichteten) Graphen, die einen Euler'schen Kreis enthalten. Geben Sie eine formale Beschreibung des Problems in der Form `Euler`$= \{(V, E) \mid \ldots\}$ an.

d) Der *Grad* $grad(v)$ eines Knotens v ist die Anzahl der Kanten, die von dem Knoten v ausgehen. Zeigen Sie, dass $G = (V, E) \in$ `Euler` genau dann, wenn G zusammenhängend ist und $grad(v)$ gerade ist für alle $v \in V$.

Hausaufgabe 9.3 *(Komplexität von Sortierverfahren)*

a) Geben Sie ein Sortierverfahren an, das n Wörter $w_1, \ldots, w_n \in A^*$ der Länge k über dem Alphabet $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ für ein festes $m \in \mathbb{N}$ sortiert und eine Zeitkomplexität von $\mathcal{O}(k(m+n)) = \mathcal{O}(n)$ hat. Wie groß ist die Platzkomplexität Ihres Sortierverfahrens.

b) Wie ändert sich die Zeitkomplexität Ihres Verfahrens, falls die Größe des Alphabets A linear mit n wächst?

Hausaufgabe 9.4 *(Komplexität von Graphenalgorithmen)*

Eine Clique der Größe k in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $|V'| = k$, so dass alle Knoten in V' miteinander verbunden sind. Sei $\texttt{Clique}_k$ die Menge aller (ungerichteten) Graphen, die eine Clique der Größe k enthalten.

a) Geben Sie eine formale Beschreibung des "Cliquen"-Problems in der Form $\texttt{Clique}_k = \{(V, E) \mid \ldots\}$ an.

b) Geben Sie eine knappe und präzise Beschreibung eines Entscheidungsverfahrens für die Menge $\texttt{Clique}_k$ an, das eine polynomielle Zeitkomplexität hat.

c) Geben Sie die genaue Zeitkomplexität Ihres Verfahrens an und begründen Sie diese.

Hausaufgabe 9.5 *(Probleme mit beliebig großer Zeitkomplexität)*

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Sei $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine (totale) berechenbare Funktion. Dann gibt es eine entscheidbare Sprache L^t_{Diag}, die von keiner Turingmaschine in Zeit $T_M(n) \in \mathcal{O}(t)$ entschieden werden kann.

Sprechstunden

Sie haben Fragen, Anregungen oder Probleme? Sprechen Sie Ihren Tutor an oder direkt die Veranstalter:

- **Jens Otten** (Raum 1.20, jeotten@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3072): immer, wenn die Türe des Raumes 1.20 offen steht, und am Donnerstag 14.30 bis 16.30 Uhr.
- **Prof. Christoph Kreitz** (Raum 1.18, kreitz@cs.uni-potsdam.de, Tel. 0331/977 3060): immer, wenn die Türe des Raumes 1.18 offen steht, und am Freitag 10.30 bis 11.30 Uhr.
