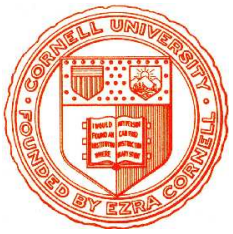
Automatisierte Logik und Programmierung

Wintersemester 2008/09



Christoph Kreitz
Theoretische Informatik, Raum 1.18, Telephon 3060
kreitz@cs.uni-potsdam.de
http://www.cs.uni-potsdam.de/ti/lehre/08-ALuP-I

1. Automatisches Schließen – wozu?
2. Was ist Automatisierte Logik?
3. Anwendungen und Erfolge
4. Aufbau & Organisation der Veranstaltung

Automatisches Schliessen – wozu?

- **Es gibt zu viele Fehler in wissenschaftlicher Arbeit**
  - Mathematische Beweise sind oft komplex
  - Menschen machen Fehler bei der Ausarbeitung von Details
  - Fehler werden auch beim Reviewprozeß von Publikationen übersehen
  - 40–50% aller veröffentlichten Resultate sind falsch

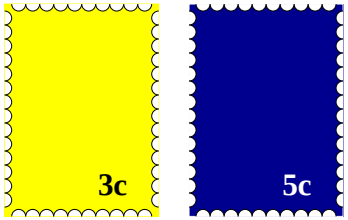
Automatisches Schliessen – wozu?

- **Es gibt zu viele Fehler in wissenschaftlicher Arbeit**
  - Mathematische Beweise sind oft komplex
  - Menschen machen Fehler bei der Ausarbeitung von Details
  - Fehler werden auch beim Reviewprozeß von Publikationen übersehen
  - 40–50% aller veröffentlichten Resultate sind falsch
- **Fast alle Softwareprodukte sind unzuverlässig**
  - Softwareprodukte und ihre Anforderungen sind extrem komplex
  - Auch sorgfältig getestete Programme enthalten größere Fehler

Automatisches Schliessen – wozu?

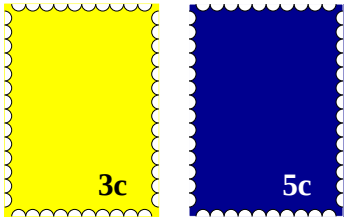
- **Es gibt zu viele Fehler in wissenschaftlicher Arbeit**
  - Mathematische Beweise sind oft komplex
  - Menschen machen Fehler bei der Ausarbeitung von Details
  - Fehler werden auch beim Reviewprozeß von Publikationen übersehen
  - 40–50% aller veröffentlichten Resultate sind falsch
- **Fast alle Softwareprodukte sind unzuverlässig**
  - Softwareprodukte und ihre Anforderungen sind extrem komplex
  - Auch sorgfältig getestete Programme enthalten größere Fehler
- **Informales Vorgehen hat sich nicht bewährt**
  - Wir konzentieren uns auf Ideen und machen Fehler bei der Ausführung
  - Wir machen implizite Annahmen, die nicht immer stimmen
  - Wir verwenden Analogien, die nicht wirklich greifen
  - Wir vertrauen "Autoritäten" ohne nachzuprüfen

Beispiel: Das Briefmarken Problem

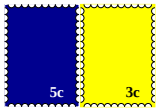


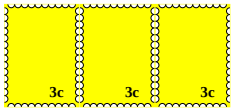
Ist es möglich jedes Porto ab 8 Cent nur mit 3c und 5c Briefmarken zu erzeugen?

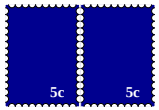
Beispiel: Das Briefmarken Problem

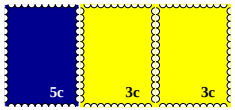


Ist es möglich jedes Porto ab 8 Cent nur mit 3c und 5c Briefmarken zu erzeugen?

8c = 

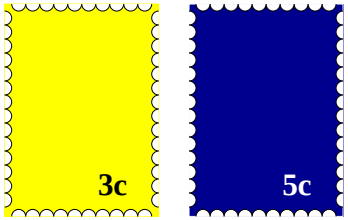
, **9c** = 

, **10c** = 

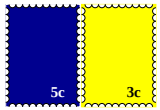
, **11c** = 

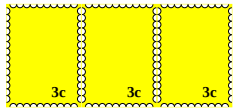
, ...

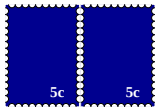
Beispiel: Das Briefmarken Problem

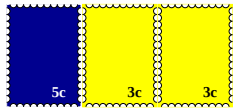


Ist es möglich jedes Porto ab 8 Cent nur mit 3c und 5c Briefmarken zu erzeugen?

8c = 

, 9c = 

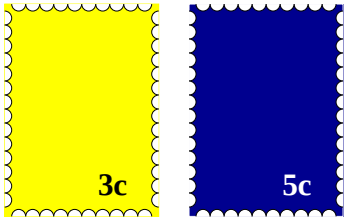
, 10c = 

, 11c = 

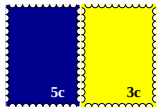
, ...

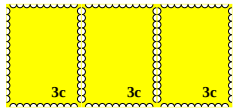
- **Einfacher Induktionsbeweis**
  - Zeige: für alle $n \geq 8$ gibt es $i, j \in \mathbb{N}$ mit $n = i \cdot 3 + j \cdot 5$
    - Basisfälle 8, 9, 10 wie oben illustriert.
    - Induktionsschritt erzeugt Lösung für $n+1$ aus der für $n-2$.

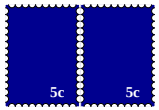
Beispiel: Das Briefmarken Problem

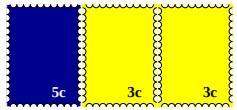


Ist es möglich jedes Porto ab 8 Cent nur mit 3c und 5c Briefmarken zu erzeugen?

8c = 

, 9c = 

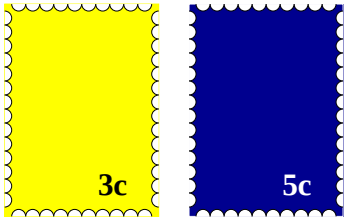
, 10c = 

, 11c = 

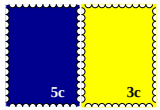
, . . .

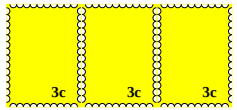
- **Einfacher Induktionsbeweis**
  - Zeige: für alle $n \geq 8$ gibt es $i, j \in \mathbb{N}$ mit $n = i \cdot 3 + j \cdot 5$
    - Basisfälle 8, 9, 10 wie oben illustriert.
    - Induktionsschritt erzeugt Lösung für $n+1$ aus der für $n-2$.
- **Gibt es andere Paare mit derselben Eigenschaft?**
  - Offensichtlich 1c und jede andere Zahl, 2c und jede ungerade Zahl

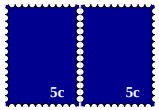
Beispiel: Das Briefmarken Problem

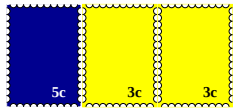


Ist es möglich jedes Porto ab 8 Cent nur mit 3c und 5c Briefmarken zu erzeugen?

8c = 

, 9c = 

, 10c = 

, 11c = 

, . . .

- **Einfacher Induktionsbeweis**
  - Zeige: für alle $n \geq 8$ gibt es $i, j \in \mathbb{N}$ mit $n = i \cdot 3 + j \cdot 5$
    - Basisfälle 8, 9, 10 wie oben illustriert.
    - Induktionsschritt erzeugt Lösung für $n+1$ aus der für $n-2$.
- **Gibt es andere Paare mit derselben Eigenschaft?**
  - Offensichtlich 1c und jede andere Zahl, 2c und jede ungerade Zahl
  - **Kann man beweisen, daß dies alle Möglichkeiten sind?**

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Sei $a<b\in\mathbb{N}$. *Ist jedes* $n\geq a+b$ *darstellbar als* $n = i\cdot a + j\cdot b$ *mit* $i, j \in \mathbb{N}$, *dann ist* $a=1$ *oder* $a=2$ *und* b *ist ungerade oder* $a=3$ *und* $b=5$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $1<a$.

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Sei $a<b\in\mathbb{N}$. *Ist jedes* $n\geq a+b$ *darstellbar als* $n = i\cdot a + j\cdot b$ *mit* $i, j \in \mathbb{N}$, *dann ist* $a=1$ *oder* $a=2$ *und* b *ist ungerade oder* $a=3$ *und* $b=5$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $1<a$.

$\exists i, j.\ a+b+1 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b=a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b=a+2$ (2)

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Sei $a<b\in\mathbb{N}$. Ist jedes $n\geq a+b$ darstellbar als $n = i\cdot a + j\cdot b$ mit $i, j \in \mathbb{N}$, dann ist $a=1$ oder $a=2$ und b ist ungerade oder $a=3$ und $b=5$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $1<a$.

$\exists i, j.\ a+b+1 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b=a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b=a+2$ (2)

Falls $a=2$, dann ist b ungerade wegen (1)

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Sei $a<b\in\mathbb{N}$. Ist jedes $n\geq a+b$ darstellbar als $n = i\cdot a + j\cdot b$ mit $i, j \in \mathbb{N}$, dann ist $a=1$ oder $a=2$ und b ist ungerade oder $a=3$ und $b=5$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $1<a$.

$\exists i, j.\ a+b+1 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b=a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b=a+2$ (2)

Falls $a=2$, dann ist b ungerade wegen (1)

Falls $a>2$, dann ist $b>3$ und (1) liefert zwei Fälle

$a \mid (b+1)$**:** wegen $a>2$ kann a nicht $b+2$ teilen und wegen (2) gilt $b=a+2$.

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Sei $a<b\in\mathbb{N}$. Ist jedes $n\geq a+b$ darstellbar als $n = i\cdot a + j\cdot b$ mit $i, j \in \mathbb{N}$, dann ist $a=1$ oder $a=2$ und b ist ungerade oder $a=3$ und $b=5$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $1<a$.

$\exists i, j.\ a+b+1 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b=a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b=a+2$ (2)

Falls $a=2$, dann ist b ungerade wegen (1)

Falls $a>2$, dann ist $b>3$ und (1) liefert zwei Fälle

$a \mid (b+1)$**:** wegen $a>2$ kann a nicht $b+2$ teilen und wegen (2) gilt $b=a+2$.

$\exists i, j.\ a+b+3 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=3$ oder $a \mid (b+3)$ oder $b=a+3$ (3)

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Sei $a<b\in\mathbb{N}$. Ist jedes $n\geq a+b$ darstellbar als $n = i\cdot a + j\cdot b$ mit $i, j \in \mathbb{N}$, dann ist $a=1$ oder $a=2$ und b ist ungerade oder $a=3$ und $b=5$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $1<a$.

$\exists i, j.\ a+b+1 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b=a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b=a+2$ (2)

Falls $a=2$, dann ist b ungerade wegen (1)

Falls $a>2$, dann ist $b>3$ und (1) liefert zwei Fälle

$a \mid (b+1)$**:** wegen $a>2$ kann a nicht $b+2$ teilen und wegen (2) gilt $b=a+2$.

$\exists i, j.\ a+b+3 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=3$ oder $a \mid (b+3)$ oder $b=a+3$ (3)

– $b=a+3$ ist unmöglich, da $b=a+2$.

– $a \mid (b+3)$ ist unmöglich, da $a \mid (b+1)$ und $a>2$.

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Sei $a<b\in\mathbb{N}$. Ist jedes $n\geq a+b$ darstellbar als $n = i\cdot a + j\cdot b$ mit $i, j \in \mathbb{N}$, dann ist $a=1$ oder $a=2$ und b ist ungerade oder $a=3$ und $b=5$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $1<a$.

$\exists i, j.\ a+b+1 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b=a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b=a+2$ (2)

Falls $a=2$, dann ist b ungerade wegen (1)

Falls $a>2$, dann ist $b>3$ und (1) liefert zwei Fälle

$a \mid (b+1)$**:** wegen $a>2$ kann a nicht $b+2$ teilen und wegen (2) gilt $b=a+2$.

$\exists i, j.\ a+b+3 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=3$ oder $a \mid (b+3)$ oder $b=a+3$ (3)

– $b=a+3$ ist unmöglich, da $b=a+2$.

– $a \mid (b+3)$ ist unmöglich, da $a \mid (b+1)$ und $a>2$.

Also gilt $a = 3$ und $b = 5$ ✓

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Sei $a<b\in\mathbb{N}$. Ist jedes $n\geq a+b$ darstellbar als $n = i\cdot a + j\cdot b$ mit $i, j \in \mathbb{N}$, dann ist $a=1$ oder $a=2$ und b ist ungerade oder $a=3$ und $b=5$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $1<a$.

$\exists i, j.\ a+b+1 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b=a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b=a+2$ (2)

Falls $a=2$, dann ist b ungerade wegen (1)

Falls $a>2$, dann ist $b>3$ und (1) liefert zwei Fälle

$a \mid (b+1)$**:** wegen $a>2$ kann a nicht $b+2$ teilen und wegen (2) gilt $b=a+2$.

$\exists i, j.\ a+b+3 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=3$ oder $a \mid (b+3)$ oder $b=a+3$ (3)

– $b=a+3$ ist unmöglich, da $b=a+2$.

– $a \mid (b+3)$ ist unmöglich, da $a \mid (b+1)$ und $a>2$.

Also gilt $a = 3$ und $b = 5$ ✓

$b=a+1$**:** wegen (2) folgt wie oben $a \mid (a+3)$ oder $a+1 = a+2$.

Beides ist unmöglich. ✓

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Sei $a<b\in\mathbb{N}$. Ist jedes $n\geq a+b$ darstellbar als $n = i\cdot a + j\cdot b$ mit $i, j \in \mathbb{N}$, dann ist $a=1$ oder $a=2$ und b ist ungerade oder $a=3$ und $b=5$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $1<a$.

$\exists i, j.\ a+b+1 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b=a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b=a+2$ (2)

Falls $a=2$, dann ist b ungerade wegen (1)

Falls $a>2$, dann ist $b>3$ und (1) liefert zwei Fälle

$a \mid (b+1)$**:** wegen $a>2$ kann a nicht $b+2$ teilen und wegen (2) gilt $b=a+2$.

$\exists i, j.\ a+b+3 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=3$ oder $a \mid (b+3)$ oder $b=a+3$ (3)

– $b=a+3$ ist unmöglich, da $b=a+2$.

– $a \mid (b+3)$ ist unmöglich, da $a \mid (b+1)$ und $a>2$.

Also gilt $a = 3$ und $b = 5$ ✓

$b=a+1$**:** wegen (2) folgt wie oben $a \mid (a+3)$ oder $a+1 = a+2$.

~~Beides ist unmöglich.~~ **Möglich für $a=3$ und $b=4$**

Beweis des Briefmarken Problems © Marktoberdorf 7/95

Sei $a<b\in\mathbb{N}$. Ist jedes $n\geq a+b$ darstellbar als $n = i\cdot a + j\cdot b$ mit $i, j \in \mathbb{N}$, dann ist $a=1$ oder $a=2$ und b ist ungerade oder $a=3$ und $b=5$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $1<a$.

$\exists i, j.\ a+b+1 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a \mid (b+1)$ oder $b=a+1$ (1)

$\exists i, j.\ a+b+2 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=2$ oder $a \mid (b+2)$ oder $b=a+2$ (2)

Falls $a=2$, dann ist b ungerade wegen (1)

Falls $a>2$, dann ist $b>3$ und (1) liefert zwei Fälle

$a \mid (b+1)$**:** wegen $a>2$ kann a nicht $b+2$ teilen und wegen (2) gilt $b=a+2$.

$\exists i, j.\ a+b+3 = i\cdot a+j\cdot b \quad \mapsto \quad a=3$ oder $a \mid (b+3)$ oder $b=a+3$ (3)

– $b=a+3$ ist unmöglich, da $b=a+2$.

– $a \mid (b+3)$ ist unmöglich, da $a \mid (b+1)$ und $a>2$.

Also gilt $a = 3$ und $b = 5$ ✓

$b=a+1$**:** wegen (2) folgt wie oben $a \mid (a+3)$ oder $a+1 = a+2$.

~~Beides ist unmöglich.~~ **Möglich für $a=3$ und $b=4$**

Formales Vorgehen hilft, solche Fehler zu vermeiden

Wir können uns Softwarefehler nicht erlauben

- **Software ist integraler Bestandteil unseres Lebens**
  - Steuerungsmodule in Alltagsprodukten, e-Commerce, Telephonnetze, Automobilkonstruktion, Luftfahrtkontrolle, ...

Wir können uns Softwarefehler nicht erlauben

- **Software ist integraler Bestandteil unseres Lebens**
  - Steuerungsmodule in Alltagsprodukten, e-Commerce, Telephonnetze, Automobilkonstruktion, Luftfahrtkontrolle, ...
- **Softwarefehler sind lästig**
  - Reboot, Datenverlust, Viren, ...

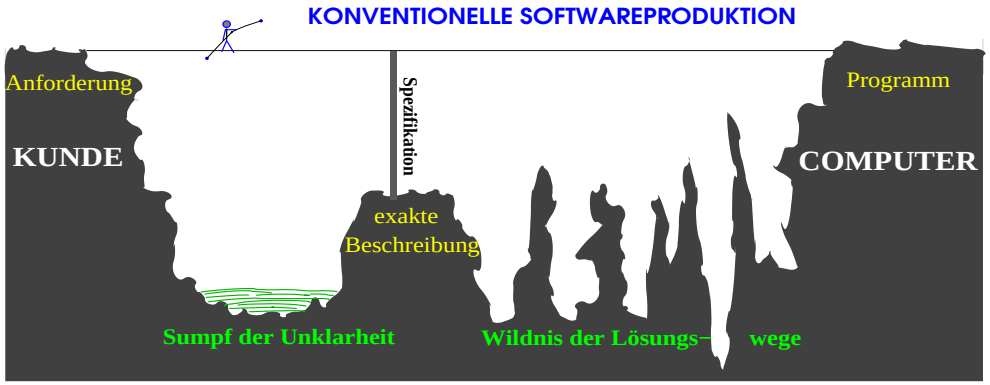
Wir können uns Softwarefehler nicht erlauben

- **Software ist integraler Bestandteil unseres Lebens**
  - Steuerungsmodule in Alltagsprodukten, e-Commerce, Telephonnetze, Automobilkonstruktion, Luftfahrtkontrolle, ...
- **Softwarefehler sind lästig**
  - Reboot, Datenverlust, Viren, ...
- **Softwarefehler sind teuer**
  - 1994: Pentium I Prozessor liefert falsche Resultate bei Division
  - 1996: ESA Ariane 501 explodiert wegen Überlauf der 16bit Arithmetik
  - 1999: Mars Polar Lander & Climate Orbiter stürzen ab (Einheitenfehler)
  - 2000: Barclays Bank erlebt unbefugten Online-Zugriff auf Fremdkonten

Wir können uns Softwarefehler nicht erlauben

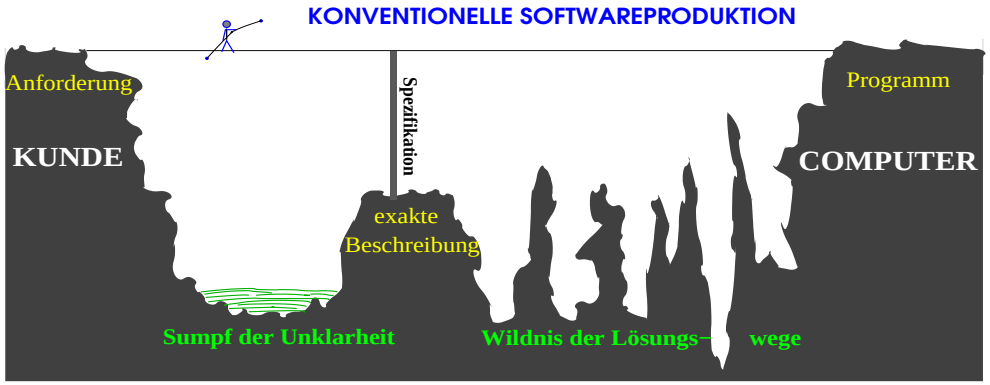
- **Software ist integraler Bestandteil unseres Lebens**
  - Steuerungsmodule in Alltagsprodukten, e-Commerce, Telephonnetze, Automobilkonstruktion, Luftfahrtkontrolle, ...
- **Softwarefehler sind lästig**
  - Reboot, Datenverlust, Viren, ...
- **Softwarefehler sind teuer**
  - 1994: Pentium I Prozessor liefert falsche Resultate bei Division
  - 1996: ESA Ariane 501 explodiert wegen Überlauf der 16bit Arithmetik
  - 1999: Mars Polar Lander & Climate Orbiter stürzen ab (Einheitenfehler)
  - 2000: Barclays Bank erlebt unbefugten Online-Zugriff auf Fremdkonten
- **Softwarefehler kosten Menschenleben**
  - 1988: Air France A320 streift Bäume bei Flugshow (Einheitenfehler)
  - 1993: Lufthansa A320 verweigert Umkehrschub bei Landung im Regen
  - 1995: Boeing 757 prallt auf Berge auf (Fehler in Navigationsdaten)

Es läuft etwas falsch in der Softwareproduktion



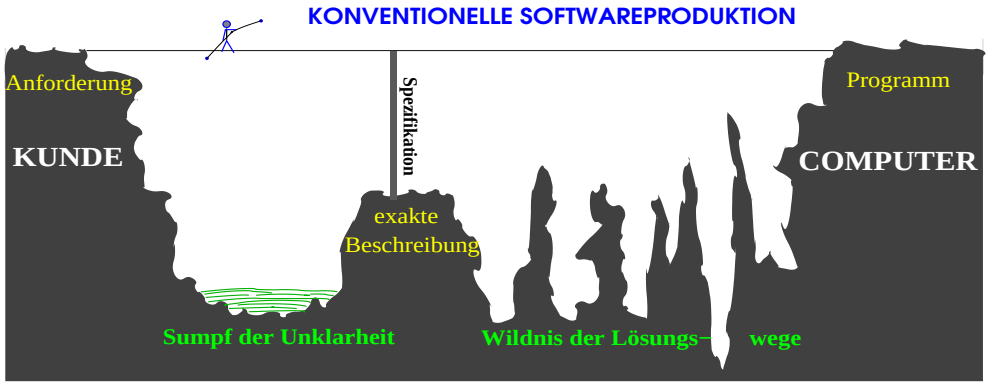
- **Konventionelle Softwareproduktion ist ineffizient**

Es läuft etwas falsch in der Softwareproduktion



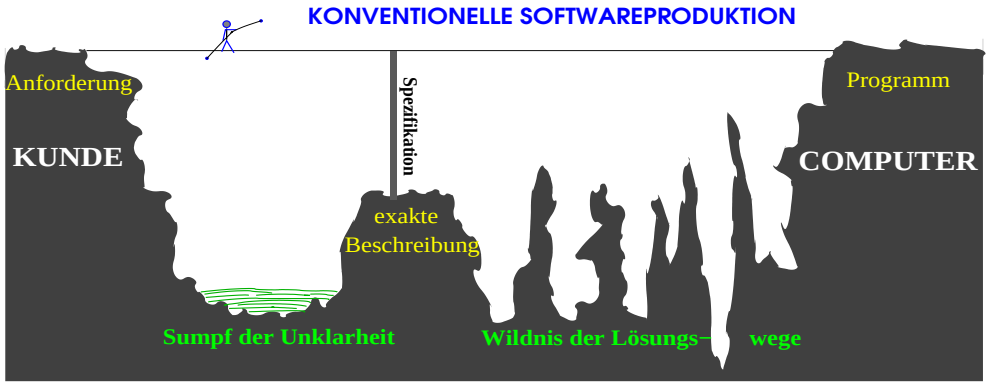
- **Konventionelle Softwareproduktion ist ineffizient**
  - Entwurf und Implementierung fokussiert auf Modellierungs- und Programmiersprachen anstatt auf Eigenschaften des Problembereichs

Es läuft etwas falsch in der Softwareproduktion



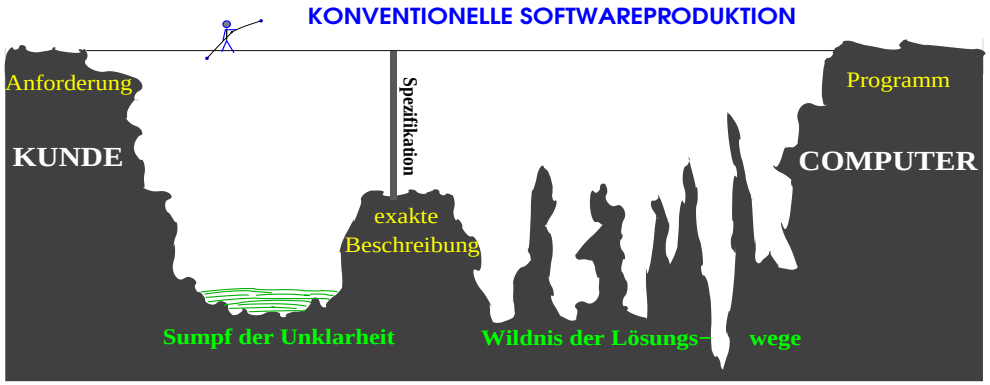
- **Konventionelle Softwareproduktion ist ineffizient**
  - Entwurf und Implementierung fokussiert auf Modellierungs- und Programmiersprachen anstatt auf Eigenschaften des Problembereichs
  - Codierung 'von Hand' führt zu hohen Kosten für Erstellung und Wartung

Es läuft etwas falsch in der Softwareproduktion



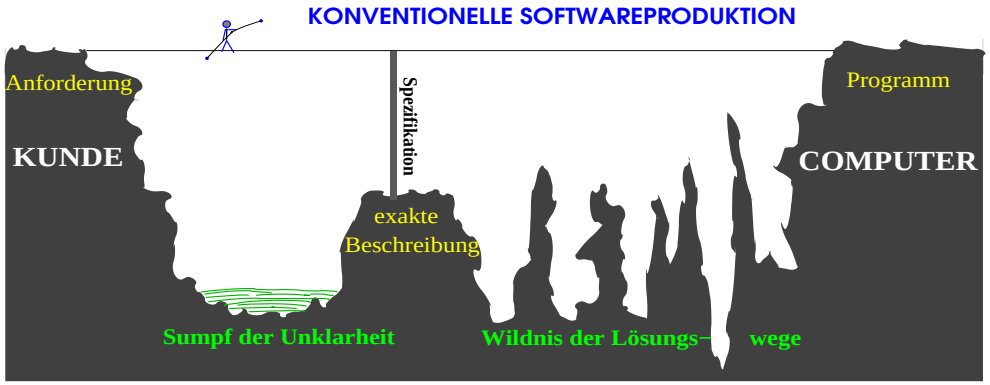
- **Konventionelle Softwareproduktion ist ineffizient**
  - Entwurf und Implementierung fokussiert auf Modellierungs- und Programmiersprachen anstatt auf Eigenschaften des Problembereichs
  - Codierung 'von Hand' führt zu hohen Kosten für Erstellung und Wartung
  - Resultate sind oft suboptimal und funktionieren selten auf Anhieb
  - Programmierer geben keine Begründung für Korrektheit ihres Programms

Es läuft etwas falsch in der Softwareproduktion



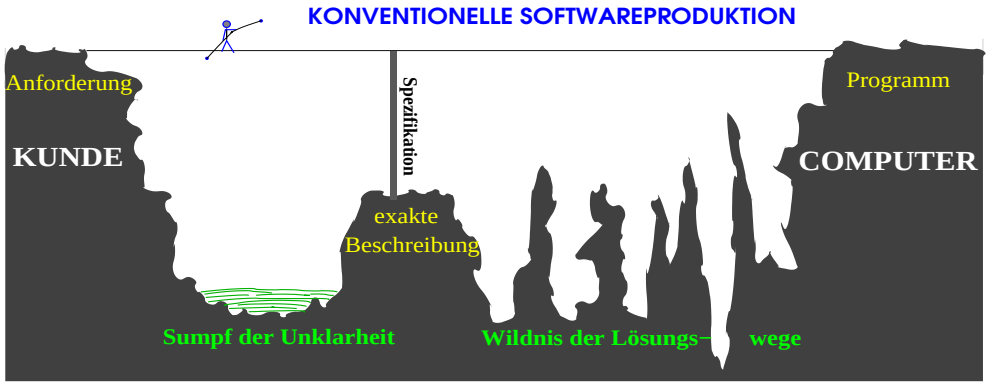
- **Konventionelle Softwareproduktion ist ineffizient**
  - Entwurf und Implementierung fokussiert auf Modellierungs- und Programmiersprachen anstatt auf Eigenschaften des Problembereichs
  - Codierung 'von Hand' führt zu hohen Kosten für Erstellung und Wartung
  - Resultate sind oft suboptimal und funktionieren selten auf Anhieb
  - Programmierer geben keine Begründung für Korrektheit ihres Programms
  - Probleme führen zu ad hoc Änderungen statt Revision des Gesamtentwurfs

Es läuft etwas falsch in der Softwareproduktion



- **Konventionelle Softwareproduktion ist ineffizient**
  - Entwurf und Implementierung fokussiert auf Modellierungs- und Programmiersprachen anstatt auf Eigenschaften des Problembereichs
  - Codierung 'von Hand' führt zu hohen Kosten für Erstellung und Wartung
  - Resultate sind oft suboptimal und funktionieren selten auf Anhieb
  - Programmierer geben keine Begründung für Korrektheit ihres Programms
  - Probleme führen zu ad hoc Änderungen statt Revision des Gesamtentwurfs
- **Softwareentwicklung ist mehr als Codierung**
  - Logische Verarbeitung von Wissen + kreative Umsetzung von Ideen

Es läuft etwas falsch in der Softwareproduktion



- **Konventionelle Softwareproduktion ist ineffizient**
  - Entwurf und Implementierung fokussiert auf Modellierungs- und Programmiersprachen anstatt auf Eigenschaften des Problembereichs
  - Codierung 'von Hand' führt zu hohen Kosten für Erstellung und Wartung
  - Resultate sind oft suboptimal und funktionieren selten auf Anhieb
  - Programmierer geben keine Begründung für Korrektheit ihres Programms
  - Probleme führen zu ad hoc Änderungen statt Revision des Gesamtentwurfs
- **Softwareentwicklung ist mehr als Codierung**
  - Logische Verarbeitung von Wissen + kreative Umsetzung von Ideen

  Automatisierte formale Logik kann diesen Prozeß unterstützen

Beispiel: Maximale Segmentsumme einer Liste

Gegeben eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ bestimme die Summe $\Sigma_{i=p}^{q} a_i$ eines Segmentes, die maximal bezüglich aller möglicher Segmentsummen ist

2	**3**	**-6**	**4**	**5**	**-3**	**8**	**-2**	**-1**	**5**	**-9**	**2**	**3**

Beispiel: Maximale Segmentsumme einer Liste

Gegeben eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ bestimme die Summe $\Sigma_{i=p}^{q} a_i$ eines Segmentes, die maximal bezüglich aller möglicher Segmentsummen ist

2	3	-6	4	5	-3	8	-2	-1	5	-9	2	3

16

Beispiel: Maximale Segmentsumme einer Liste

Gegeben eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ bestimme die Summe $\Sigma_{i=p}^{q} a_i$ eines Segmentes, die maximal bezüglich aller möglicher Segmentsummen ist

2	3	-6	4	5	-3	8	-2	-1	5	-9	2	3

16

- **Direkte Lösung leicht zu programmieren**

```
let maxseg a ≡
   result := a[1]
   from p = 1 to length(a) do
      from q = i to length(a) do
         sum := 0
         from i = p to q do sum := sum+a[i] end
         if sum > result then result := sum
      end
   end
```

Beispiel: Maximale Segmentsumme einer Liste

Gegeben eine Folge $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ bestimme die Summe $\Sigma_{i=p}^{q} a_i$ eines Segmentes, die maximal bezüglich aller möglicher Segmentsummen ist

2	3	-6	4	5	-3	8	-2	-1	5	-9	2	3

16

- **Direkte Lösung leicht zu programmieren**

```
let maxseg a ≡
   result := a[1]
   from p = 1 to length(a) do
      from q = i to length(a) do
         sum := 0
         from i = p to q do sum := sum+a[i] end
         if sum > result then result := sum
      end
   end
```

- **Algorithmus ist ineffizient** $(\mathcal{O}(n^3))$
  - **Wie kann man eine bessere Lösung erzeugen?**

Maximale Segmentsumme: systematische Lösung

Betrachte Eigenschaften von $M_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{q} a_i \mid 1 \leq p \leq q \leq n\}$

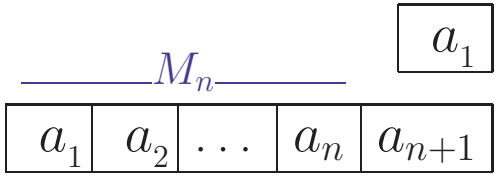
- **Induktive Analyse liefert**
  - $M_1 = a_1$

a_1

Maximale Segmentsumme: systematische Lösung

Betrachte Eigenschaften von $M_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{q} a_i \mid 1 \leq p \leq q \leq n\}$

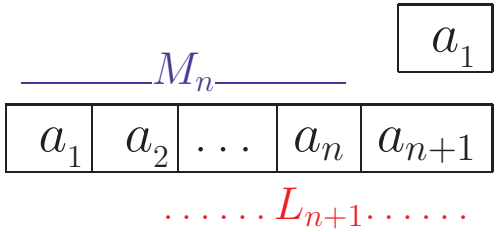
- **Induktive Analyse liefert**
  - $M_1 = a_1$
  - $M_{n+1} = max(M_n, max\{\Sigma_{i=p}^{n+1} a_i \mid 1 \leq p \leq n\})$



Maximale Segmentsumme: systematische Lösung

Betrachte Eigenschaften von $M_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{q} a_i \mid 1 \leq p \leq q \leq n\}$

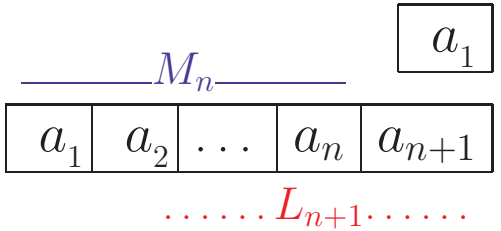
- **Induktive Analyse liefert**
  - $M_1 = a_1$
  - $M_{n+1} = max(M_n, max\{\Sigma_{i=p}^{n+1} a_i \mid 1 \leq p \leq n\})$



Maximale Segmentsumme: systematische Lösung

Betrachte Eigenschaften von $M_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{q} a_i \mid 1 \leq p \leq q \leq n\}$

- **Induktive Analyse liefert**
  - $M_1 = a_1$
  - $M_{n+1} = max(M_n, max\{\Sigma_{i=p}^{n+1} a_i \mid 1 \leq p \leq n\})$

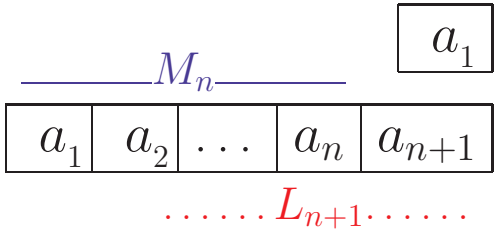


- **Definiere** $\boldsymbol{L_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{n} a_i \mid 1 \leq p \leq n\}}$

Maximale Segmentsumme: systematische Lösung

Betrachte Eigenschaften von $M_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{q} a_i \mid 1 \leq p \leq q \leq n\}$

- **Induktive Analyse liefert**
  - $M_1 = a_1$
  - $M_{n+1} = max(M_n, max\{\Sigma_{i=p}^{n+1} a_i \mid 1 \leq p \leq n\})$

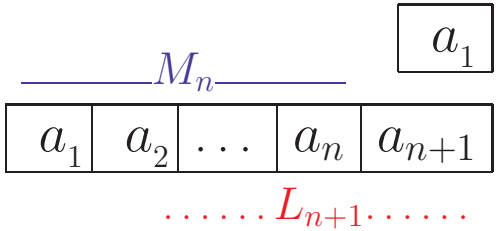


- **Definiere** $\boldsymbol{L_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{n} a_i \mid 1 \leq p \leq n\}}$
  - $L_1 = a_1$,

Maximale Segmentsumme: systematische Lösung

Betrachte Eigenschaften von $M_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{q} a_i \mid 1 \leq p \leq q \leq n\}$

- **Induktive Analyse liefert**
  - $M_1 = a_1$
  - $M_{n+1} = max(M_n, max\{\Sigma_{i=p}^{n+1} a_i \mid 1 \leq p \leq n\})$

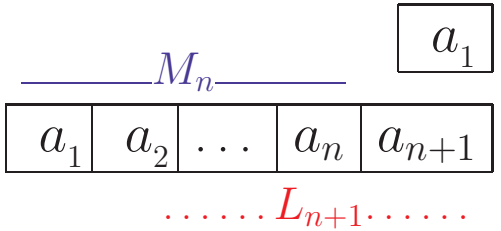


- **Definiere** $\boldsymbol{L_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{n} a_i \mid 1 \leq p \leq n\}}$
  - $L_1 = a_1, \quad L_{n+1} = max(L_n + a_{n+1},\ a_{n+1})$

Maximale Segmentsumme: systematische Lösung

Betrachte Eigenschaften von $M_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{q} a_i \mid 1 \leq p \leq q \leq n\}$

- **Induktive Analyse liefert**
  - $M_1 = a_1$
  - $M_{n+1} = max(M_n, max\{\Sigma_{i=p}^{n+1} a_i \mid 1 \leq p \leq n\})$



- **Definiere** $\boldsymbol{L_n \equiv max\{\Sigma_{i=p}^{n} a_i \mid 1 \leq p \leq n\}}$
  - $L_1 = a_1, \quad L_{n+1} = max(L_n + a_{n+1},\ a_{n+1})$
- **Analyse liefert eleganten, effizienten Algorithmus**

```
let maxseg a ≡
   M_n := a[1]
   L_n := a[1]
   from n = 1 to length(a) do
      if L_n>0 then L_n := L_n+a[n] else L_n := a[n]
      if L_n>M_n then M_n := L_n
   end
```

Automatisches Schliessen liefert Lösungen

- **Logische Analyse führt zu besserer Software**
  - Wissen wird systematisch verarbeitet

Automatisches Schliessen liefert Lösungen

- **Logische Analyse führt zu besserer Software**
  - Wissen wird systematisch verarbeitet
- **Formalisierung logischer Schlüsse eliminiert Fehler**
  - Zusammenhang zwischen Aufgabe und Lösung wird überprüfbar
  - Effektive Kooperation zwischen Mensch und Maschine möglich
    - Kreative Steuerung des Entwicklungsprozesses durch Menschen
    - Computer kontrolliert Korrektheit der Herleitung in logischem Kalkül

Automatisches Schliessen liefert Lösungen

- **Logische Analyse führt zu besserer Software**
  - Wissen wird systematisch verarbeitet
- **Formalisierung logischer Schlüsse eliminiert Fehler**
  - Zusammenhang zwischen Aufgabe und Lösung wird überprüfbar
  - Effektive Kooperation zwischen Mensch und Maschine möglich
    - Kreative Steuerung des Entwicklungsprozesses durch Menschen
    - Computer kontrolliert Korrektheit der Herleitung in logischem Kalkül
- **Automatisierte Logik reduziert Aufwand**
  - Computer führt "triviale" logische Schlüsse von selbst aus
  - Computer synthetisiert Code aus formaler Analyse des Problems

Automatisierte Logik – Leibniz' Traum erfüllt?

∼1700: **"Logisches Schließen präzisieren"**

– Universelle, akkurate Wissenschaftssprache
– Regeln für Lösung wissenschaftlicher Dispute

$\Big\}$ $\mapsto$ *"Calculemus"*

Automatisierte Logik – Leibniz' Traum erfüllt?

~1700: **"Logisches Schließen präzisieren"**

– Universelle, akkurate Wissenschaftssprache
– Regeln für Lösung wissenschaftlicher Dispute

} ↦ *"Calculemus"*

1890: **Formale Logik**

– Gesetze der Logik simuliert durch mechanische Textmanipulation

Automatisierte Logik – Leibniz' Traum erfüllt?

∼1700: "Logisches Schließen präzisieren"

– Universelle, akkurate Wissenschaftssprache
– Regeln für Lösung wissenschaftlicher Dispute

} ↦ *"Calculemus"*

1890: Formale Logik

– Gesetze der Logik simuliert durch mechanische Textmanipulation

1941: Computer – ideal für symbolische Manipulation

– Fehlerfreie Anwendung von Regeln
– Suche nach Lösungen durch Untersuchung 'unzähliger' Möglichkeiten

Automatisierte Logik – Leibniz' Traum erfüllt?

∼1700: "Logisches Schließen präzisieren"

– Universelle, akkurate Wissenschaftssprache
– Regeln für Lösung wissenschaftlicher Dispute

} ↦ *"Calculemus"*

1890: Formale Logik

– Gesetze der Logik simuliert durch mechanische Textmanipulation

1941: Computer – ideal für symbolische Manipulation

– Fehlerfreie Anwendung von Regeln
– Suche nach Lösungen durch Untersuchung 'unzähliger' Möglichkeiten

⇓

Simuliere logisches Schließen auf dem Computer

Simulation mathematisch-semantischer Argumente

Simulation mathematisch-semantischer Argumente

- **Anwendung formaler Regeln ohne Nachdenken**
  - Umgeht Mehrdeutigkeiten der natürlichen Sprache
  - Erlaubt schematische Lösung mathematischer Probleme

Formale Logische Kalküle

Simulation mathematisch-semantischer Argumente

- **Anwendung formaler Regeln ohne Nachdenken**
  - Umgeht Mehrdeutigkeiten der natürlichen Sprache
  - Erlaubt schematische Lösung mathematischer Probleme
- **Kernbestandteile:**
  - Formale Sprache (Syntax + Semantik)
  - Ableitungssystem (Axiome + Inferenzregeln)

Formale Logische Kalküle

Simulation mathematisch-semantischer Argumente

- **Anwendung formaler Regeln ohne Nachdenken**
  - Umgeht Mehrdeutigkeiten der natürlichen Sprache
  - Erlaubt schematische Lösung mathematischer Probleme
- **Kernbestandteile:**
  - Formale Sprache (Syntax + Semantik)
  - Ableitungssystem (Axiome + Inferenzregeln)
- **Wichtige Eigenschaften**
  - Korrekt, vollständig, automatisierbar (notwendig)
  - Leicht verständlich (für Interaktion)
  - Konstruktiv, ausdrucksstark (für Programmierung)

  Nicht jeder Kalkül hat all diese Eigenschaften gleichzeitig

Theoretische Grenzen

- **Arithmetik ist nicht voll axiomatisierbar**

Theoretische Grenzen

- **Arithmetik ist nicht voll axiomatisierbar**
- **Kein allgemeines Verfahren kann entscheiden**
  - ob eine gegebene logische Formel gültig ist
  - ob ein gegebenes Programm terminiert
  - ob ein gegebenes Programm korrekt ist
  - ob zwei Programme dieselbe Funktionalität haben

Theoretische Grenzen

- **Arithmetik ist nicht voll axiomatisierbar**
- **Kein allgemeines Verfahren kann entscheiden**
  - ob eine gegebene logische Formel gültig ist
  - ob ein gegebenes Programm terminiert
  - ob ein gegebenes Programm korrekt ist
  - ob zwei Programme dieselbe Funktionalität haben

Beweisverfahren müssen nach Beweisen suchen

- Unendliche Suchbäume — keine Antwort im Mißerfolgsfall
- Suche erfordert Benutzersteuerung oder intelligente Strategien

Computergestütztes logisches Schliessen

- **Interaktive Beweiseditoren**
  - Benutzer konstruieren Beweise durch Anwendung von Regeln
  - Computer führt Regeln aus und zeigt ungelöste Teilprobleme
  - Mechanismus: Pattern Matching + Term Rewriting

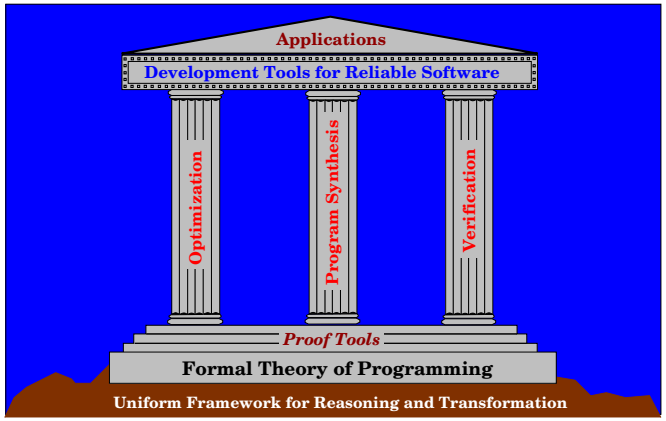
Computergestütztes logisches Schliessen

- **Interaktive Beweiseditoren**
  - Benutzer konstruieren Beweise durch Anwendung von Regeln
  - Computer führt Regeln aus und zeigt ungelöste Teilprobleme
  - Mechanismus: Pattern Matching + Term Rewriting
- **Automatische Beweisprozeduren**
  - Taktiken: programmierte Anwendung von Inferenzregeln
  - Entscheidungsprozeduren for entscheidbare Teilprobleme
  - Beweissuchverfahren für eingeschränkte Anwendungsbereiche
    - Prädikatenlogik, Gleichheit, Induktion, Spezialanwendungen, ...
  - Beweisplaner, Model Checking, Computer Algebra, ...

Computergestütztes logisches Schliessen

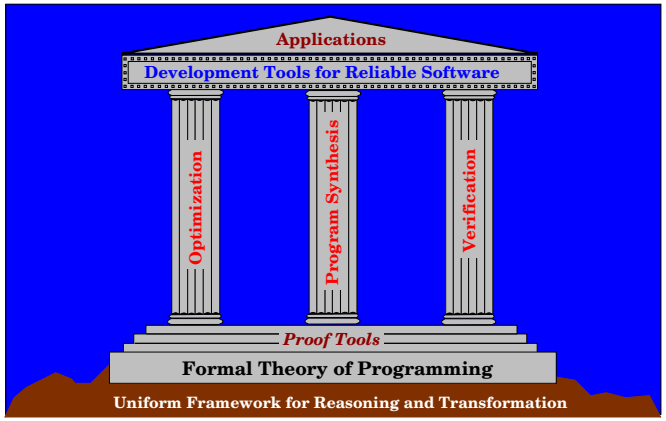
- **Interaktive Beweiseditoren**
  - Benutzer konstruieren Beweise durch Anwendung von Regeln
  - Computer führt Regeln aus und zeigt ungelöste Teilprobleme
  - Mechanismus: Pattern Matching + Term Rewriting
- **Automatische Beweisprozeduren**
  - Taktiken: programmierte Anwendung von Inferenzregeln
  - Entscheidungsprozeduren for entscheidbare Teilprobleme
  - Beweissuchverfahren für eingeschränkte Anwendungsbereiche
    - Prädikatenlogik, Gleichheit, Induktion, Spezialanwendungen, ...
  - Beweisplaner, Model Checking, Computer Algebra, ...
- **Integrierte Systeme**
  - Interaktive Beweiseditoren mit externen Steuerungsmechanismen

Anwendungsgebiete



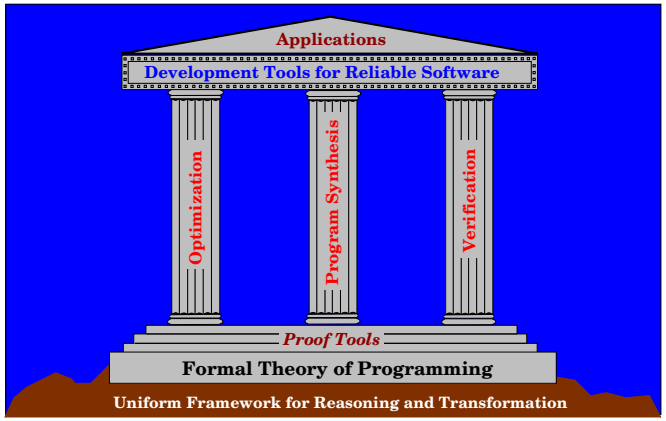
- **Mathematische Beweisführung**
  - Aufdeckung und Korrektur von Fehlern (Beweisprüfung)
  - Automatische Suche nach neuen Beweisen (Theorembeweisen)

Anwendungsgebiete



- **Mathematische Beweisführung**
  - Aufdeckung und Korrektur von Fehlern (Beweisprüfung)
  - Automatische Suche nach neuen Beweisen (Theorembeweisen)
- **Unterstützung für Entwurf zuverlässiger Software**
  - Fehlersuche und Korrektheitsbeweise (Verifikation)
  - Verbesserung der Performanz (Optimierung)
  - Erzeugung aus Spezifikatione (Synthese)

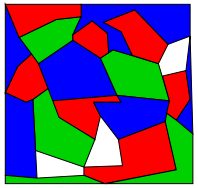
Anwendungsgebiete



- **Mathematische Beweisführung**
  - Aufdeckung und Korrektur von Fehlern (Beweisprüfung)
  - Automatische Suche nach neuen Beweisen (Theorembeweisen)
- **Unterstützung für Entwurf zuverlässiger Software**
  - Fehlersuche und Korrektheitsbeweise (Verifikation)
  - Verbesserung der Performanz (Optimierung)
  - Erzeugung aus Spezifikatione (Synthese)
- **Inferenzmaschine für KI-Systeme**
  - Problemlöser und Planer für Roboter, ...

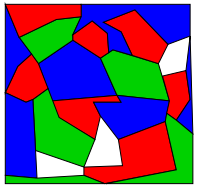
Erfolge der Vergangenheit machen Mut ...

1977: **Vier-Farben Problem**



– Spezialsoftware überprüft tausende kritischer Fälle

Erfolge der Vergangenheit machen Mut ...



1977: **Vier-Farben Problem**

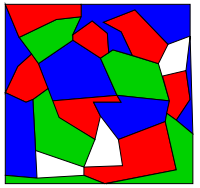
- Spezialsoftware überprüft tausende kritischer Fälle

1993: **Synthese von Scheduling Algorithmen**

- KIDS erzeugt korrekte Algorithmen in wenigen Stunden
- Erzeugter Lisp Code 2000 mal schneller als existierende ADA Software

Erfolge der Vergangenheit machen Mut ...

1977: **Vier-Farben Problem**



– Spezialsoftware überprüft tausende kritischer Fälle

1993: **Synthese von Scheduling Algorithmen**

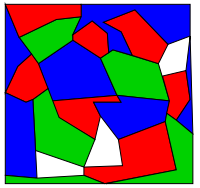
– KIDS erzeugt korrekte Algorithmen in wenigen Stunden

– Erzeugter Lisp Code 2000 mal schneller als existierende ADA Software

1995: **Pentium Bug**

– Model Checking findet Fehler in Hardwaretabellen für Division

Erfolge der Vergangenheit machen Mut ...



1977: **Vier-Farben Problem**

– Spezialsoftware überprüft tausende kritischer Fälle

1993: **Synthese von Scheduling Algorithmen**

– KIDS erzeugt korrekte Algorithmen in wenigen Stunden

– Erzeugter Lisp Code 2000 mal schneller als existierende ADA Software

1995: **Pentium Bug**

– Model Checking findet Fehler in Hardwaretabellen für Division

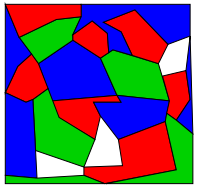
The New York Times

1996: **Robbins Hypothese**

– Theorembeweiser EQP findet (lesbaren) Beweis in 7 Tagen

Erfolge der Vergangenheit machen Mut ...

1977: **Vier-Farben Problem**



– Spezialsoftware überprüft tausende kritischer Fälle

1993: **Synthese von Scheduling Algorithmen**

– KIDS erzeugt korrekte Algorithmen in wenigen Stunden

– Erzeugter Lisp Code 2000 mal schneller als existierende ADA Software

1995: **Pentium Bug**

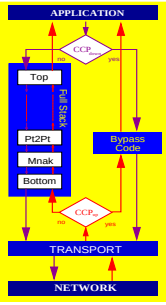
– Model Checking findet Fehler in Hardwaretabellen für Division

1996: **Robbins Hypothese**

The New York Times

– Theorembeweiser EQP findet (lesbaren) Beweis in 7 Tagen

1998: **Netzwerkverifikation, -optimierung, -entwurf**



– Verifikation findet subtilen Fehler in Kommunikationsprotokoll

– Logische Optimierung steigert Performanz um Faktor 3–10

– Formaler Entwurf eines verifizierten adaptiven Protokolls

Zugehörige Studien- und Forschungsgebiete

- **Formale Logiken**
  - Klassische, intuitionistische, modale, lineare, temporale, ...
  - Logik erster Stufe, höherer Stufe, Typentheorien, ...
  - Formalisierung von Objekten, Vererbung, Nebenläufigkeit, Echtzeit, ...

Zugehörige Studien- und Forschungsgebiete

- **Formale Logiken**
  - Klassische, intuitionistische, modale, lineare, temporale, ...
  - Logik erster Stufe, höherer Stufe, Typentheorien, ...
  - Formalisierung von Objekten, Vererbung, Nebenläufigkeit, Echtzeit, ...
- **Automatische Beweisprozeduren**
  - Matrixmethoden, Induktionsbeweisen, Rewriting, Beweisplaner, ...
  - Entscheidungsprozeduren, kooperierende & verteilte Beweiser, ...

Zugehörige Studien- und Forschungsgebiete

- **Formale Logiken**
  - Klassische, intuitionistische, modale, lineare, temporale, ...
  - Logik erster Stufe, höherer Stufe, Typentheorien, ...
  - Formalisierung von Objekten, Vererbung, Nebenläufigkeit, Echtzeit, ...
- **Automatische Beweisprozeduren**
  - Matrixmethoden, Induktionsbeweisen, Rewriting, Beweisplaner, ...
  - Entscheidungsprozeduren, kooperierende & verteilte Beweiser, ...
- **Beweisentwicklungssysteme**
  - Interaktive Beweiseditoren, Beweispräsentation, Wissensverwaltung, ...
  - Web-Einbindung, GUI's, Systemschnittstellen, ...

Zugehörige Studien- und Forschungsgebiete

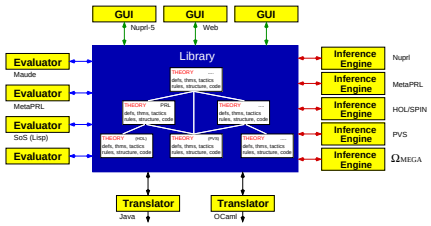
- **Formale Logiken**
  - Klassische, intuitionistische, modale, lineare, temporale, ...
  - Logik erster Stufe, höherer Stufe, Typentheorien, ...
  - Formalisierung von Objekten, Vererbung, Nebenläufigkeit, Echtzeit, ...
- **Automatische Beweisprozeduren**
  - Matrixmethoden, Induktionsbeweisen, Rewriting, Beweisplaner, ...
  - Entscheidungsprozeduren, kooperierende & verteilte Beweiser, ...
- **Beweisentwicklungssysteme**
  - Interaktive Beweiseditoren, Beweispräsentation, Wissensverwaltung, ...
  - Web-Einbindung, GUI's, Systemschnittstellen, ...
- **Anwendung: Logik in die Software bringen**
  - Verifikation formalen Wissens zu Daten- und Algorithmenstrukturen
  - Strategien für Synthese, Verifikation und Optimierung von Algorithmen
  - Entwicklung und Verifikation sicherheitskritischer Systeme

⋮

Themen dieser Veranstaltung

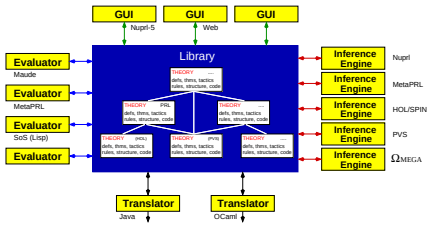
- **Formale Kalküle** (Wintersemester)
  - Logisches Schließen: Prädikatenlogik
  - Programmierung: λ-Kalkül
  - Programmeigenschaften: einfache Typentheorie
  - Ein uniformer Kalkül: Konstruktive Typentheorie

Themen dieser Veranstaltung

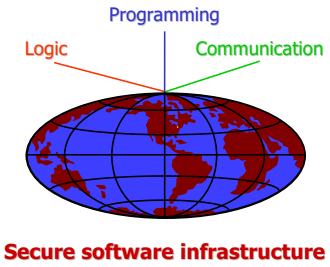


- **Formale Kalküle** (Wintersemester)
  - Logisches Schließen: Prädikatenlogik
  - Programmierung: λ-Kalkül
  - Programmeigenschaften: einfache Typentheorie
  - Ein uniformer Kalkül: Konstruktive Typentheorie
- **Beweisentwicklungssysteme** (Sommersemester)
  - Das Nuprl Logical Programming Environment
  - Taktische Beweisführung
  - Entscheidungsprozeduren
  - Integration externer Beweissysteme

Themen dieser Veranstaltung



- **Formale Kalküle** (Wintersemester)
  - Logisches Schließen: Prädikatenlogik
  - Programmierung: λ-Kalkül
  - Programmeigenschaften: einfache Typentheorie
  - Ein uniformer Kalkül: Konstruktive Typentheorie
- **Beweisentwicklungssysteme** (Sommersemester)
  - Das Nuprl Logical Programming Environment
  - Taktische Beweisführung
  - Entscheidungsprozeduren
  - Integration externer Beweissysteme



- **Anwendungen** (Sommersemester)
  - Aufbau formaler Theorien
  - Programmsynthese
  - Optimierung von (verteilter) Software

⋮

Formalia

- **Zuordnung:** **theoretische Informatik**
  angewandte Informatik

Formalia

- **Zuordnung: theoretische Informatik**
  angewandte Informatik
- **Veranstaltungstermine**
  - Di 11:00–12:30 – Vorlesung
  - Mi 13:30–15:00 – Vorlesung/Übung im Wechsel
  - Keine Veranstaltung am 6./7. Januar 2009

Formalia

- **Zuordnung: theoretische Informatik**
  angewandte Informatik
- **Veranstaltungstermine**
  - Di 11:00–12:30 – Vorlesung
  - Mi 13:30–15:00 – Vorlesung/Übung im Wechsel
  - Keine Veranstaltung am 6./7. Januar 2009
- **Hilfreiche Vorkenntnisse:**
  - Formale Logik, Funktionale Programmierung, KI

Formalia

- **Zuordnung: theoretische Informatik**
  angewandte Informatik
- **Veranstaltungstermine**
  - Di 11:00–12:30 – Vorlesung
  - Mi 13:30–15:00 – Vorlesung/Übung im Wechsel
  - Keine Veranstaltung am 6./7. Januar 2009
- **Hilfreiche Vorkenntnisse:**
  - Formale Logik, Funktionale Programmierung, KI
- **Lehrmaterialien**
  - Vorlesungsfolien, Skript (1995), Fachbücher im Web

Formalia

- **Zuordnung: theoretische Informatik**
  angewandte Informatik
- **Veranstaltungstermine**
  - Di 11:00–12:30 – Vorlesung
  - Mi 13:30–15:00 – Vorlesung/Übung im Wechsel
  - Keine Veranstaltung am 6./7. Januar 2009
- **Hilfreiche Vorkenntnisse:**
  - Formale Logik, Funktionale Programmierung, KI
- **Lehrmaterialien**
  - Vorlesungsfolien, Skript (1995), Fachbücher im Web
- **Erfolgskriterien**
  - Abschlußprüfung (mündlich/schriftlich, je nach Teilnehmerzahl)
  - Aktive Teilnahme an Übungen ist sehr hilfreich