

Automatisierte Logik und Programmierung

Teil I

Formalisierung



Automatisierte Logik und Programmierung

Einheit 2



Grundkonzepte formaler Kalküle



1. Syntax und Semantik

... am Beispiel der Prädikatenlogik

2. Konzeptionelle Betrachtungen

- Definitorische Erweiterung
- Objekt- und Metasprache
- Klassische vs. intuitionistische Mathematik
- Evidenzsemantik

3. Prinzipien formaler Beweisführung

**Simulation semantischer Schlußfolgerungen
durch Regeln für symbolische Manipulation**

Simulation semantischer Schlußfolgerungen durch Regeln für symbolische Manipulation

- **Regelanwendung ohne Nachdenken**

- Umgeht Mehrdeutigkeiten der natürlichen Sprache
- Erlaubt schematische Lösung mathematischer Probleme

Beispiele: Differentialkalkül, Fourier-Transformationen,
Computer Algebra, Formale Logik

Simulation semantischer Schlußfolgerungen durch Regeln für symbolische Manipulation

- **Regelanwendung ohne Nachdenken**

- Umgeht Mehrdeutigkeiten der natürlichen Sprache
- Erlaubt schematische Lösung mathematischer Probleme

Beispiele: Differentialkalkül, Fourier-Transformationen,
Computer Algebra, Formale Logik

- **Kernbestandteile:**

- Formale Sprache (Syntax + Semantik)
- Ableitungssystem (Axiome + Inferenzregeln)

Simulation semantischer Schlußfolgerungen durch Regeln für symbolische Manipulation

- **Regelanwendung ohne Nachdenken**

- Umgeht Mehrdeutigkeiten der natürlichen Sprache
- Erlaubt schematische Lösung mathematischer Probleme

Beispiele: Differentialkalkül, Fourier-Transformationen,
Computer Algebra, Formale Logik

- **Kernbestandteile:**

- Formale Sprache (Syntax + Semantik)
- Ableitungssystem (Axiome + Inferenzregeln)

- **Wichtige Eigenschaften logischer Kalküle**

- Korrekt, vollständig, automatisierbar
- Leicht verständlich, ausdrucksstark

- **Prädikatenlogik**

- Schlußfolgerungen aus der logischen Struktur einer Aussage

KALKÜLE IN DIESER VERANSTALTUNG

- **Prädikatenlogik**

- Schlußfolgerungen aus der logischen Struktur einer Aussage

- **λ -Kalkül**

- Schließen über das Resultat von Berechnungen

KALKÜLE IN DIESER VERANSTALTUNG

- **Prädikatenlogik**

- Schlußfolgerungen aus der logischen Struktur einer Aussage

- **λ -Kalkül**

- Schließen über das Resultat von Berechnungen

- **Einfache Typentheorie**

- Prinzipien des Schließens über Eigenschaften von Algorithmen

KALKÜLE IN DIESER VERANSTALTUNG

- **Prädikatenlogik**

- Schlußfolgerungen aus der logischen Struktur einer Aussage

- **λ -Kalkül**

- Schließen über das Resultat von Berechnungen

- **Einfache Typentheorie**

- Prinzipien des Schließens über Eigenschaften von Algorithmen

- **Konstruktive (intuitionistische) Typentheorie**

- Uniformer Kalkül für Logik, Berechnung und Programmeigenschaften
- Formalisiert Grundkonzepte von Mathematik und Programmierung
- Fundamentale Theorie: konstruktive Auslegung + direkte Semantik
- Implementiert im Nuprl System

- **Syntax:** Präzisierung des Vokabulars
 - Formale Struktur der Sprache (Notation, textliche Erscheinungsform)
 - Beschreibbar durch mathematische Definitionsgleichungen
oder durch formale Grammatiken

- **Syntax:** Präzisierung des **Vokabulars**

- Formale **Struktur** der Sprache (Notation, textliche Erscheinungsform)
- Beschreibbar durch **mathematische Definitionsgleichungen**
oder durch **formale Grammatiken**

- **Semantik:** Präzisierung der **Bedeutung** von **Text**

- Interpretation syntaktisch korrekter Ausdrücke in informaler **Zielsprache**
Beschreibbar durch **Interpretationsfunktion**: Quellsymbole $\mapsto$ Zielobjekte

- **Syntax:** Präzisierung des **Vokabulars**

- Formale **Struktur** der Sprache (Notation, textliche Erscheinungsform)
- Beschreibbar durch **mathematische Definitionsgleichungen**
oder durch **formale Grammatiken**

- **Semantik:** Präzisierung der **Bedeutung** von **Text**

- Interpretation syntaktisch korrekter Ausdrücke in informaler **Zielsprache**
Beschreibbar durch **Interpretationsfunktion**: Quellsymbole $\mapsto$ Zielobjekte
... aber was ist die Bedeutung der Zielsprache?

- **Syntax:** Präzisierung des **Vokabulars**

- Formale **Struktur** der Sprache (Notation, textliche Erscheinungsform)
- Beschreibbar durch **mathematische Definitionsgleichungen**
oder durch **formale Grammatiken**

- **Semantik:** Präzisierung der **Bedeutung** von **Text**

- Interpretation syntaktisch korrekter Ausdrücke in informaler **Zielsprache**
Beschreibbar durch **Interpretationsfunktion**: Quellsymbole $\mapsto$ Zielobjekte
... aber was ist die Bedeutung der Zielsprache?
- **Direkte Semantik** für Grundlagentheorien (**Mengentheorie**, **Typentheorie**)
Mathematische Präzisierung der intuitiven Bedeutung

FORMALISIERUNG UMGANGSSPRACHLICHER AUSSAGEN

Studenten, die im Hauptstudium mindestens 120 Leistungspunkte erreichen, haben die Diplomhauptprüfung bestanden

Mögliche Formalisierungen

FORMALISIERUNG UMGANGSSPRACHLICHER AUSSAGEN

Studenten, die im Hauptstudium mindestens 120 Leistungspunkte erreichen, haben die Diplomhauptprüfung bestanden

Mögliche Formalisierungen

– DPO-14.3

ohne Struktur

FORMALISIERUNG UMGANGSSPRACHLICHER AUSSAGEN

Studenten, die im Hauptstudium mindestens 120 Leistungspunkte erreichen, haben die Diplomhauptprüfung bestanden

Mögliche Formalisierungen

– DPO-14.3

ohne Struktur

– 120-Leistungspunkte $\Rightarrow$ Diplom-bestanden

Aussagenlogik

FORMALISIERUNG UMGANGSSPRACHLICHER AUSSAGEN

Studenten, die im Hauptstudium mindestens 120 Leistungspunkte erreichen, haben die Diplomhauptprüfung bestanden

Mögliche Formalisierungen

- DPO-14.3 *ohne Struktur*
- 120-Leistungspunkte $\Rightarrow$ Diplom-bestanden *Aussagenlogik*
- $\forall \text{student. Leistungspunkte-erreicht}(\text{student}, 120)$
 $\Rightarrow$ Diplom-bestanden(student) *zu viel Text*

FORMALISIERUNG UMGANGSSPRACHLICHER AUSSAGEN

Studenten, die im Hauptstudium mindestens 120 Leistungspunkte erreichen, haben die Diplomhauptprüfung bestanden

Mögliche Formalisierungen

- DPO-14.3 *ohne Struktur*
- 120-Leistungspunkte $\Rightarrow$ Diplom-bestanden *Aussagenlogik*
- $\forall \text{student. Leistungspunkte-erreicht}(\text{student}, 120)$
 $\Rightarrow \text{Diplom-bestanden}(\text{student})$ *zu viel Text*
- $\forall s. (lp(s) > 120) \Rightarrow D(s)$ *typisch Prädikatenlogik*

FORMALISIERUNG UMGANGSSPRACHLICHER AUSSAGEN

Studenten, die im Hauptstudium mindestens 120 Leistungspunkte erreichen, haben die Diplomhauptprüfung bestanden

Mögliche Formalisierungen

- DPO-14.3 *ohne Struktur*
- 120-Leistungspunkte $\Rightarrow$ Diplom-bestanden *Aussagenlogik*
- $\forall \text{student. Leistungspunkte-erreicht}(\text{student}, 120)$
 $\Rightarrow \text{Diplom-bestanden}(\text{student})$ *zu viel Text*
- $\forall s. (\text{lp}(s) > 120) \Rightarrow D(s)$ *typisch Prädikatenlogik*
- $\forall s:\text{Student. } (\text{lp}(s) > 120) \Rightarrow D(s)$ *Prädikatenlogik mit Sorten*

ANFORDERUNGEN AN EINE FORMALISIERUNGSSPRACHE

- Kurz, prägnant, maschinenlesbar

ANFORDERUNGEN AN EINE FORMALISIERUNGSSPRACHE

- Kurz, prägnant, maschinenlesbar
- Frei wählbare Symbole für Prädikate, Operatoren, Platzhalter für Objekte

ANFORDERUNGEN AN EINE FORMALISIERUNGSSPRACHE

- Kurz, prägnant, maschinenlesbar
- Frei wählbare Symbole für Prädikate, Operatoren, Platzhalter für Objekte
- Fest definierte Symbole für logische Bezüge (Konnektive, Quantoren)

ANFORDERUNGEN AN EINE FORMALISIERUNGSSPRACHE

- Kurz, prägnant, maschinenlesbar
- Frei wählbare Symbole für Prädikate, Operatoren, Platzhalter für Objekte
- Fest definierte Symbole für logische Bezüge (Konnektive, Quantoren)
- Eventuell fest definierte Symbole für wichtige Standardkonzepte (Gleichheit, ...)

ANFORDERUNGEN AN EINE FORMALISIERUNGSSPRACHE

- Kurz, prägnant, maschinenlesbar
- Frei wählbare Symbole für Prädikate, Operatoren, Platzhalter für Objekte
- Fest definierte Symbole für logische Bezüge (Konnektive, Quantoren)
- Eventuell fest definierte Symbole für wichtige Standardkonzepte (Gleichheit, ...)
- Eventuell Klassifizierung von Bereichen bzw. (Daten-)typen in Quantoren

SYNTAX DER PRÄDIKATENLOGIK MIT SORTEN UND GLEICHHEIT

● (Abzählbare) **Alphabete** für erlaubte Symbole

- $\mathcal{V}$: Variablensymbole $x, y, z, \dots$
- $\mathcal{F}^i$: i -stellige Funktionssymbole, $\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}^i$ $f, g, h, \dots, a, b, c, \dots$
- $\mathcal{P}^i$: i -stellige Prädikatssymbole, $\mathcal{P} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i$ $P, Q, R, \dots$
- $\mathcal{T}$: Bereichssymbole (Typen / Sorten) $S, T, \dots$

SYNTAX DER PRÄDIKATENLOGIK MIT SORTEN UND GLEICHHEIT

- (Abzählbare) **Alphabete** für erlaubte Symbole

- $\mathcal{V}$: Variablensymbole $x, y, z, \dots$
- $\mathcal{F}^i$: i -stellige Funktionssymbole, $\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}^i$ $f, g, h, \dots, a, b, c, \dots$
- $\mathcal{P}^i$: i -stellige Prädikatssymbole, $\mathcal{P} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i$ $P, Q, R, \dots$
- $\mathcal{T}$: Bereichssymbole (Typen / Sorten) $S, T, \dots$

- **Terme**: Formalisierung mathematischer **Objekte**

- Variablen $x \in \mathcal{V}$, Konstante $f \in \mathcal{F}^0$ (atomare Terme)

SYNTAX DER PRÄDIKATENLOGIK MIT SORTEN UND GLEICHHEIT

● (Abzählbare) **Alphabete** für erlaubte Symbole

- $\mathcal{V}$: Variablensymbole $x, y, z, \dots$
- $\mathcal{F}^i$: i -stellige Funktionssymbole, $\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}^i$ $f, g, h, \dots, a, b, c, \dots$
- $\mathcal{P}^i$: i -stellige Prädikatssymbole, $\mathcal{P} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i$ $P, Q, R, \dots$
- $\mathcal{T}$: Bereichssymbole (Typen / Sorten) $S, T, \dots$

● **Terme**: Formalisierung mathematischer **Objekte**

- Variablen $x \in \mathcal{V}$, Konstante $f \in \mathcal{F}^0$ (atomare Terme)
- $f(t_1, \dots, t_n)$, wobei $t_1, \dots, t_n$ Terme, $f \in \mathcal{F}^n$

SYNTAX DER PRÄDIKATENLOGIK MIT SORTEN UND GLEICHHEIT

● (Abzählbare) **Alphabete** für erlaubte Symbole

- $\mathcal{V}$: Variablensymbole $x, y, z, \dots$
- $\mathcal{F}^i$: i -stellige Funktionssymbole, $\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}^i$ $f, g, h, \dots, a, b, c, \dots$
- $\mathcal{P}^i$: i -stellige Prädikatssymbole, $\mathcal{P} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i$ $P, Q, R, \dots$
- $\mathcal{T}$: Bereichssymbole (Typen / Sorten) $S, T, \dots$

● **Terme**: Formalisierung mathematischer **Objekte**

- Variablen $x \in \mathcal{V}$, Konstante $f \in \mathcal{F}^0$ (atomare Terme)
- $f(t_1, \dots, t_n)$, wobei $t_1, \dots, t_n$ Terme, $f \in \mathcal{F}^n$

● **Formeln**: Formalisierung mathematischer **Aussagen**

- Konstante **ff**, Aussagenvariable $P \in \mathcal{P}^0$ (atomare Formeln)
- $t_1 = t_2$, $P(t_1, \dots, t_n)$, wobei $t_1, t_2, \dots, t_n$ Terme, $P \in \mathcal{P}^n$

SYNTAX DER PRÄDIKATENLOGIK MIT SORTEN UND GLEICHHEIT

● (Abzählbare) **Alphabete** für erlaubte Symbole

- $\mathcal{V}$: Variablensymbole $x, y, z, \dots$
- $\mathcal{F}^i$: i -stellige Funktionssymbole, $\mathcal{F} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}^i$ $f, g, h, \dots, a, b, c, \dots$
- $\mathcal{P}^i$: i -stellige Prädikatssymbole, $\mathcal{P} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i$ $P, Q, R, \dots$
- $\mathcal{T}$: Bereichssymbole (Typen / Sorten) $S, T, \dots$

● **Terme**: Formalisierung mathematischer **Objekte**

- Variablen $x \in \mathcal{V}$, Konstante $f \in \mathcal{F}^0$ (atomare Terme)
- $f(t_1, \dots, t_n)$, wobei $t_1, \dots, t_n$ Terme, $f \in \mathcal{F}^n$

● **Formeln**: Formalisierung mathematischer **Aussagen**

- Konstante **ff**, Aussagenvariable $P \in \mathcal{P}^0$ (atomare Formeln)
 $t_1 = t_2, P(t_1, \dots, t_n)$, wobei $t_1, t_2, \dots, t_n$ Terme, $P \in \mathcal{P}^n$
- $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B, \forall x:T.A, \exists x:T.A, (A)$
wobei A, B Formeln, $x \in \mathcal{V}, T \in \mathcal{T}$

BEISPIELE FÜR TERME UND FORMELN

● Korrekte Terme

- x
- 24
- $\text{vater}(\text{peter})$
- $\text{max}(2,3,4), \quad \text{max}(\text{plus}(4,\text{plus}(5,5)),23,5)$

BEISPIELE FÜR TERME UND FORMELN

● Korrekte Terme

– x

$x \in \mathcal{V}$

– 24

$24 \in \mathcal{F}^0$

– $\text{vater}(\text{peter})$

$\text{peter} \in \mathcal{V}, \text{vater} \in \mathcal{F}^1$

– $\text{max}(2,3,4), \text{max}(\text{plus}(4,\text{plus}(5,5)),23,5)$

Kontext bestimmt Rolle von Symbolen

BEISPIELE FÜR TERME UND FORMELN

● Korrekte Terme

- x $x \in \mathcal{V}$
- 24 $24 \in \mathcal{F}^0$
- $\text{vater}(\text{peter})$ $\text{peter} \in \mathcal{V}, \text{vater} \in \mathcal{F}^1$
- $\text{max}(2,3,4), \text{max}(\text{plus}(4,\text{plus}(5,5)),23,5)$

Kontext bestimmt Rolle von Symbolen

● Korrekte Formeln

- $(4=\text{plus}(2,3)) \Rightarrow \text{ff}$
- $\text{Sein} \vee \neg \text{Sein}, \text{lange_währt} \Rightarrow \text{endlich_gut}$
- $\forall x:\mathbb{N}. \exists y:\mathbb{Z}. \leq(* (y,y), x) \wedge <(x, *(\text{plus}(y,1), \text{plus}(y,1)))$

BEISPIELE FÜR TERME UND FORMELN

● Korrekte Terme

- x $x \in \mathcal{V}$
- 24 $24 \in \mathcal{F}^0$
- $\text{vater}(\text{peter})$ $\text{peter} \in \mathcal{V}, \text{vater} \in \mathcal{F}^1$
- $\text{max}(2,3,4), \text{max}(\text{plus}(4,\text{plus}(5,5)),23,5)$

Kontext bestimmt Rolle von Symbolen

● Korrekte Formeln

- $(4=\text{plus}(2,3)) \Rightarrow \text{ff}$
- $\text{Sein} \vee \neg \text{Sein}, \text{lange_währt} \Rightarrow \text{endlich_gut}$
- $\forall x:\mathbb{N}. \exists y:\mathbb{Z}. \leq(* (y,y), x) \wedge <(x, *(\text{plus}(y,1), \text{plus}(y,1)))$

● Keine Formeln

- $\text{plus}(\text{plus}(2,3),4)$

BEISPIELE FÜR TERME UND FORMELN

● Korrekte Terme

- x $x \in \mathcal{V}$
- 24 $24 \in \mathcal{F}^0$
- $\text{vater}(\text{peter})$ $\text{peter} \in \mathcal{V}, \text{vater} \in \mathcal{F}^1$
- $\text{max}(2,3,4), \text{max}(\text{plus}(4,\text{plus}(5,5)),23,5)$
Kontext bestimmt Rolle von Symbolen

● Korrekte Formeln

- $(4=\text{plus}(2,3)) \Rightarrow \text{ff}$
- $\text{Sein} \vee \neg \text{Sein}, \text{lange_währt} \Rightarrow \text{endlich_gut}$
- $\forall x:\mathbb{N}. \exists y:\mathbb{Z}. \leq(* (y,y), x) \wedge <(x, *(\text{plus}(y,1), \text{plus}(y,1)))$

● Keine Formeln

- $\text{plus}(\text{plus}(2,3),4)$ Term
- $\wedge \text{so_weiter}$

BEISPIELE FÜR TERME UND FORMELN

● Korrekte Terme

- x $x \in \mathcal{V}$
- 24 $24 \in \mathcal{F}^0$
- $\text{vater}(\text{peter})$ $\text{peter} \in \mathcal{V}, \text{vater} \in \mathcal{F}^1$
- $\text{max}(2,3,4), \text{max}(\text{plus}(4,\text{plus}(5,5)),23,5)$
Kontext bestimmt Rolle von Symbolen

● Korrekte Formeln

- $(4=\text{plus}(2,3)) \Rightarrow \text{ff}$
- $\text{Sein} \vee \neg \text{Sein}, \text{lange_währt} \Rightarrow \text{endlich_gut}$
- $\forall x:\mathbb{N}. \exists y:\mathbb{Z}. \leq(* (y,y), x) \wedge <(x, *(\text{plus}(y,1), \text{plus}(y,1)))$

● Keine Formeln

- $\text{plus}(\text{plus}(2,3),4)$ Term
- $\wedge \text{so_weiter}$ Formel links von $\wedge$ fehlt
- $\forall x:\mathbb{N}. x(4)=x$

BEISPIELE FÜR TERME UND FORMELN

● Korrekte Terme

- x $x \in \mathcal{V}$
- 24 $24 \in \mathcal{F}^0$
- $\text{vater}(\text{peter})$ $\text{peter} \in \mathcal{V}, \text{vater} \in \mathcal{F}^1$
- $\text{max}(2,3,4), \text{max}(\text{plus}(4,\text{plus}(5,5)),23,5)$

Kontext bestimmt Rolle von Symbolen

● Korrekte Formeln

- $(4=\text{plus}(2,3)) \Rightarrow \text{ff}$
- $\text{Sein} \vee \neg \text{Sein}, \text{lange_währt} \Rightarrow \text{endlich_gut}$
- $\forall x:\mathbb{N}. \exists y:\mathbb{Z}. \leq(* (y,y), x) \wedge <(x, *(\text{plus}(y,1), \text{plus}(y,1)))$

● Keine Formeln

- $\text{plus}(\text{plus}(2,3),4)$ Term
- $\wedge \text{so_weiter}$ Formel links von $\wedge$ fehlt
- $\forall x:\mathbb{N}. x(4)=x$ Variable als Funktionszeichen
- $\forall f:F. f(4)=0$

BEISPIELE FÜR TERME UND FORMELN

● Korrekte Terme

- x $x \in \mathcal{V}$
- 24 $24 \in \mathcal{F}^0$
- $\text{vater}(\text{peter})$ $\text{peter} \in \mathcal{V}, \text{vater} \in \mathcal{F}^1$
- $\text{max}(2,3,4), \text{max}(\text{plus}(4,\text{plus}(5,5)),23,5)$
Kontext bestimmt Rolle von Symbolen

● Korrekte Formeln

- $(4=\text{plus}(2,3)) \Rightarrow \text{ff}$
- $\text{Sein} \vee \neg \text{Sein}, \text{lange_währt} \Rightarrow \text{endlich_gut}$
- $\forall x:\mathbb{N}. \exists y:\mathbb{Z}. \leq(* (y,y), x) \wedge <(x, *(\text{plus}(y,1), \text{plus}(y,1)))$

● Keine Formeln

- $\text{plus}(\text{plus}(2,3),4)$ Term
- $\wedge \text{so_weiter}$ Formel links von $\wedge$ fehlt
- $\forall x:\mathbb{N}. x(4)=x$ Variable als Funktionszeichen
- $\forall f:F. f(4)=0$ Quantifizierung über Funktionszeichen (higher-order)
- $\forall x. x=x$

BEISPIELE FÜR TERME UND FORMELN

● Korrekte Terme

- x $x \in \mathcal{V}$
- 24 $24 \in \mathcal{F}^0$
- $\text{vater}(\text{peter})$ $\text{peter} \in \mathcal{V}, \text{vater} \in \mathcal{F}^1$
- $\text{max}(2, 3, 4), \text{max}(\text{plus}(4, \text{plus}(5, 5)), 23, 5)$
Kontext bestimmt Rolle von Symbolen

● Korrekte Formeln

- $(4 = \text{plus}(2, 3)) \Rightarrow \text{ff}$
- $\text{Sein} \vee \neg \text{Sein}, \text{lange_währt} \Rightarrow \text{endlich_gut}$
- $\forall x: \mathbb{N}. \exists y: \mathbb{Z}. \leq(* (y, y), x) \wedge <(x, *(\text{plus}(y, 1), \text{plus}(y, 1)))$

● Keine Formeln

- $\text{plus}(\text{plus}(2, 3), 4)$ Term
- $\wedge \text{so_weiter}$ Formel links von $\wedge$ fehlt
- $\forall x: \mathbb{N}. x(4) = x$ Variable als Funktionszeichen
- $\forall f: F. f(4) = 0$ Quantifizierung über Funktionszeichen (higher-order)
- $\forall x. x = x$ Typsymbol fehlt (unsortierte Prädikatenlogik)

KONVENTIONEN SPAREN KLAMMERN

$\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2) \Rightarrow y=2 \wedge >(y,20)$ heißt?

KONVENTIONEN SPAREN KLAMMERN

$\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2) \Rightarrow y=2 \wedge >(y,20)$ heißt?

– $\exists y:\mathbb{N}. (\text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2)) \Rightarrow (y=2 \wedge >(y,20))$??

KONVENTIONEN SPAREN KLAMMERN

$\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2) \Rightarrow y=2 \wedge >(y,20)$ heißt?

- $\exists y:\mathbb{N}. (\text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2)) \Rightarrow (y=2 \wedge >(y,20))$??
- $\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge (\geq(y,2) \Rightarrow (y=2 \wedge >(y,20)))$??

KONVENTIONEN SPAREN KLAMMERN

$\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2) \Rightarrow y=2 \wedge >(y,20)$ heißt?

- $\exists y:\mathbb{N}. (\text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2)) \Rightarrow (y=2 \wedge >(y,20))$??
- $\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge (\geq(y,2) \Rightarrow (y=2 \wedge >(y,20)))$??
- $\exists y:\mathbb{N}. (\text{gerade}(y) \wedge (\geq(y,2) \Rightarrow y=2)) \wedge >(y,20)$??

KONVENTIONEN SPAREN KLAMMERN

$\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2) \Rightarrow y=2 \wedge >(y,20)$ heißt?

- $\exists y:\mathbb{N}. (\text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2)) \Rightarrow (y=2 \wedge >(y,20))$??
- $\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge (\geq(y,2) \Rightarrow (y=2 \wedge >(y,20)))$??
- $\exists y:\mathbb{N}. (\text{gerade}(y) \wedge (\geq(y,2) \Rightarrow y=2)) \wedge >(y,20)$??

● Prioritäten zwischen verschiedenen Konnektiven

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$, dann folgt $\vee$, dann $\Rightarrow$, dann $\exists$, dann $\forall$.

$A \wedge \neg B$ entspricht $A \wedge (\neg B)$

$A \wedge B \vee C$ entspricht $(A \wedge B) \vee C$

$\exists x:T. A \wedge B$ entspricht $\exists x:T. (A \wedge B)$

Achtung: Unterschiedliche Konventionen in verschiedenen Lehrbüchern

KONVENTIONEN SPAREN KLAMMERN

$\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2) \Rightarrow y=2 \wedge >(y,20)$ heißt?

- $\exists y:\mathbb{N}. (\text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2)) \Rightarrow (y=2 \wedge >(y,20))$??
- $\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge (\geq(y,2) \Rightarrow (y=2 \wedge >(y,20)))$??
- $\exists y:\mathbb{N}. (\text{gerade}(y) \wedge (\geq(y,2) \Rightarrow y=2)) \wedge >(y,20)$??

● Prioritäten zwischen verschiedenen Konnektiven

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$, dann folgt $\vee$, dann $\Rightarrow$, dann $\exists$, dann $\forall$.

$A \wedge \neg B$ entspricht $A \wedge (\neg B)$

$A \wedge B \vee C$ entspricht $(A \wedge B) \vee C$

$\exists x:T. A \wedge B$ entspricht $\exists x:T. (A \wedge B)$

Achtung: Unterschiedliche Konventionen in verschiedenen Lehrbüchern

● Rechtsassoziativität bei Iteration von $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$

- $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ entspricht $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

KONVENTIONEN SPAREN KLAMMERN

$\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2) \Rightarrow y=2 \wedge >(y,20)$ heißt?

- $\exists y:\mathbb{N}. (\text{gerade}(y) \wedge \geq(y,2)) \Rightarrow (y=2 \wedge >(y,20))$??
- $\exists y:\mathbb{N}. \text{gerade}(y) \wedge (\geq(y,2) \Rightarrow (y=2 \wedge >(y,20)))$??
- $\exists y:\mathbb{N}. (\text{gerade}(y) \wedge (\geq(y,2) \Rightarrow y=2)) \wedge >(y,20)$??

● Prioritäten zwischen verschiedenen Konnektiven

- $\neg$ bindet stärker als $\wedge$, dann folgt $\vee$, dann $\Rightarrow$, dann $\exists$, dann $\forall$.

$A \wedge \neg B$ entspricht $A \wedge (\neg B)$

$A \wedge B \vee C$ entspricht $(A \wedge B) \vee C$

$\exists x:T. A \wedge B$ entspricht $\exists x:T. (A \wedge B)$

Achtung: Unterschiedliche Konventionen in verschiedenen Lehrbüchern

● Rechtsassoziativität bei Iteration von $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$

- $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ entspricht $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

● Keine Klammern bei Funktions-/Prädikatssymbolen

- Px entspricht $P(x)$ und $fx y$ entspricht $f(x, y)$

- **Konservative Erweiterung der Objektsprache**
 - Neues Konstrukte sind **definitorische Abkürzung** für existierende objektsprachliche Ausdrücke (ggf. mit Parametern)

- **Konservative Erweiterung der Objektsprache**

- Neues Konstrukte sind **definitorische Abkürzung** für existierende objektsprachliche Ausdrücke (ggf. mit Parametern)
- Beispiel: **Äquivalenz** in der Prädikatenlogik

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

● **Konservative Erweiterung der Objektsprache**

- Neues Konstrukte sind **definitorische Abkürzung** für existierende objektsprachliche Ausdrücke (ggf. mit Parametern)
- Beispiel: **Äquivalenz** in der Prädikatenlogik

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

- Bedeutung wird auf Semantik bestehender Konstrukte abgestützt

- **Konservative Erweiterung der Objektsprache**

- Neues Konstrukte sind **definitorische Abkürzung** für existierende objektsprachliche Ausdrücke (ggf. mit Parametern)
- Beispiel: **Äquivalenz** in der Prädikatenlogik

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

- Bedeutung wird auf Semantik bestehender Konstrukte abgestützt

- **Erlaubt kleinen Grundformalismus**

- Einfache Syntax und Semantik
- Einfaches Inferenzsystem
- Eigenschaften leicht beweisbar

- **Konservative Erweiterung der Objektsprache**

- Neues Konstrukte sind **definitorische Abkürzung** für existierende objektsprachliche Ausdrücke (ggf. mit Parametern)
- Beispiel: **Äquivalenz** in der Prädikatenlogik

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$

- Bedeutung wird auf Semantik bestehender Konstrukte abgestützt

- **Erlaubt kleinen Grundformalismus**

- Einfache Syntax und Semantik
- Einfaches Inferenzsystem
- Eigenschaften leicht beweisbar

- **Erhöht Flexibilität des Formalismus**

- Ergibt **umfangreiche formale Sprache**
- Erlaubt **freiere Syntax**

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

- **Objektsprache:**

- Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
- Formale Sprache mit präzise definierter Syntax

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

- **Objektsprache:**

- Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
- Formale Sprache mit präzise definierter Syntax
- Beispiel: $(\exists x:T. P_1(x) \vee P_2(x)) \Rightarrow \neg(\forall x:T. \neg P_1(x) \wedge \neg P_2(x))$

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

- **Objektsprache:**

- Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
- Formale Sprache mit präzise definierter Syntax
- Beispiel: $(\exists x:T. P_1(x) \vee P_2(x)) \Rightarrow \neg(\forall x:T. \neg P_1(x) \wedge \neg P_2(x))$

- **Metasprache:**

- Sprache, um Aussagen über den Kalkül zu machen
 - Beschreibung von Syntax, Semantik, Eigenschaften des Kalküls

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

● Objektsprache:

- Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
- Formale Sprache mit präzise definierter Syntax
- Beispiel: $(\exists x:T. P_1(x) \vee P_2(x)) \Rightarrow \neg(\forall x:T. \neg P_1(x) \wedge \neg P_2(x))$

● Metasprache:

- Sprache, um Aussagen über den Kalkül zu machen
 - Beschreibung von Syntax, Semantik, Eigenschaften des Kalküls
- Natürliche, oft stark schematisierte Sprache
- Enthält Objektsprache, angereichert um syntaktische Metavariablen

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

● Objektsprache:

- Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
- Formale Sprache mit präzise definierter Syntax
- Beispiel: $(\exists x:T. P_1(x) \vee P_2(x)) \Rightarrow \neg(\forall x:T. \neg P_1(x) \wedge \neg P_2(x))$

● Metasprache:

- Sprache, um Aussagen über den Kalkül zu machen
 - Beschreibung von Syntax, Semantik, Eigenschaften des Kalküls
- Natürliche, oft stark schematisierte Sprache
- Enthält Objektsprache, angereichert um syntaktische Metavariablen
- Beispiel: *aus* $(\exists x:T. A \vee B)$ *folgt* $\neg(\forall x:T. \neg A \wedge \neg B)$

Präsentation von Kalkülen hat zwei Sprachebenen

● Objektsprache:

- Sprache des Kalküls, in dem formalisiert wird
- Formale Sprache mit präzise definierter Syntax
- Beispiel: $(\exists x:T. P_1(x) \vee P_2(x)) \Rightarrow \neg(\forall x:T. \neg P_1(x) \wedge \neg P_2(x))$

● Metasprache:

- Sprache, um Aussagen über den Kalkül zu machen
 - Beschreibung von Syntax, Semantik, Eigenschaften des Kalküls
- Natürliche, oft stark schematisierte Sprache
- Enthält Objektsprache, angereichert um syntaktische Metavariablen
- Beispiel: *aus* $(\exists x:T. A \vee B)$ *folgt* $\neg(\forall x:T. \neg A \wedge \neg B)$

● Unterscheidung zuweilen durch Fonts / Farben

- Ansonsten aus Kontext eindeutig erkennbar

SEMANTIK DER PRÄDIKATENLOGIK (I)

INTERPRETATION IN DER MENGENTHEORIE

- **Interpretation $\mathcal{I}$:**
 - Universum $\mathcal{U}$ + Interpretationsfunktion ι

SEMANTIK DER PRÄDIKATENLOGIK (I)

INTERPRETATION IN DER MENGENTHEORIE

- **Interpretation $\mathcal{I}$:**

- Universum $\mathcal{U}$ + Interpretationsfunktion ι

- **Freie Wahl von ι auf elementaren Symbolen**

- $\iota(x)$ Objekt aus $\mathcal{U}$ $(x \in \mathcal{V})$
 - $\iota(f)$ n -stellige Funktion $\phi : \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}$ $(f \in \mathcal{F}^n)$
 - $\iota(T)$ Teilmenge von $\mathcal{U}$ $(T \in \mathcal{T})$
 - $\iota(P)$ Funktion $\Pi : \mathcal{U}^n \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$ $(P \in \mathcal{P}^n)$

SEMANTIK DER PRÄDIKATENLOGIK (I)

INTERPRETATION IN DER MENGENTHEORIE

- **Interpretation $\mathcal{I}$:**

- Universum $\mathcal{U}$ + Interpretationsfunktion ι

- **Freie Wahl von ι auf elementaren Symbolen**

- $\iota(x)$ Objekt aus $\mathcal{U}$ $(x \in \mathcal{V})$
 - $\iota(f)$ n -stellige Funktion $\phi : \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{U}$ $(f \in \mathcal{F}^n)$
 - $\iota(T)$ Teilmenge von $\mathcal{U}$ $(T \in \mathcal{T})$
 - $\iota(P)$ Funktion $\Pi : \mathcal{U}^n \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$ $(P \in \mathcal{P}^n)$

- **Homomorphe Fortsetzung auf Terme und Formeln**

- $\iota(f(t_1, \dots, t_n)) = \iota(f)(\iota(t_1), \dots, \iota(t_n))$
 - $\iota(\text{ff}) = \text{falsch}$
 - $\iota(t_1 = t_2) = \text{wahr}$, falls $\iota(t_1)$ und $\iota(t_2)$ in $\mathcal{U}$ gleich (sonst falsch)
 - $\iota(P(t_1, \dots, t_n)) = \iota(P)(\iota(t_1), \dots, \iota(t_n))$.
 - $\iota(A) = \iota(A)$

SEMANTIK DER PRÄDIKATENLOGIK (II)

FORTSETZUNG VON ι AUF ZUSAMMENGESETZTE FORMELN

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{falsch} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x:T. A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\exists x:T. A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

SEMANTIK DER PRÄDIKATENLOGIK (II)

FORTSETZUNG VON ι AUF ZUSAMMENGESETZTE FORMELN

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{falsch} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ und } \iota(B) = \text{wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x:T. A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\exists x:T. A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

SEMANTIK DER PRÄDIKATENLOGIK (II)

FORTSETZUNG VON ι AUF ZUSAMMENGESETZTE FORMELN

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{falsch} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ und } \iota(B) = \text{wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ oder } \iota(B) = \text{wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x:T. A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\exists x:T. A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

SEMANTIK DER PRÄDIKATENLOGIK (II)

FORTSETZUNG VON ι AUF ZUSAMMENGESETZTE FORMELN

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{falsch} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ und } \iota(B) = \text{wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ oder } \iota(B) = \text{wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls aus } \iota(A) = \text{wahr} \text{ immer } \iota(B) = \text{wahr} \text{ folgt} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x:T. A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\exists x:T. A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

SEMANTIK DER PRÄDIKATENLOGIK (II)

FORTSETZUNG VON ι AUF ZUSAMMENGESETZTE FORMELN

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{falsch} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ und } \iota(B) = \text{wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ oder } \iota(B) = \text{wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls aus } \iota(A) = \text{wahr} \text{ immer } \iota(B) = \text{wahr} \text{ folgt} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x:T.A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \text{wahr} \text{ für alle } u \in \iota(T) \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota_x^u(x) = u, \text{ sonst } \iota_x^u = \iota$$

$$\iota(\exists x:T.A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

SEMANTIK DER PRÄDIKATENLOGIK (II)

FORTSETZUNG VON ι AUF ZUSAMMENGESETZTE FORMELN

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{falsch} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ und } \iota(B) = \text{wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ oder } \iota(B) = \text{wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls aus } \iota(A) = \text{wahr} \text{ immer } \iota(B) = \text{wahr} \text{ folgt} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x:T.A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \text{wahr} \text{ für alle } u \in \iota(T) \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\iota_x^u(x) = u, \text{ sonst } \iota_x^u = \iota$

$$\iota(\exists x:T.A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \text{wahr} \text{ für ein } u \in \iota(T) \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

SEMANTIK DER PRÄDIKATENLOGIK (II) – KLASSISCH

FORTSETZUNG VON ι AUF ZUSAMMENGESETZTE FORMELN

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{falsch} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ und } \iota(B) = \text{wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } \iota(A) = \text{falsch} \text{ und } \iota(B) = \text{falsch} \\ \text{wahr} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ und } \iota(B) = \text{falsch} \\ \text{wahr} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x:T.A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \text{wahr} \text{ für alle } u \in \iota(T) \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\iota_x^u(x) = u, \text{ sonst } \iota_x^u = \iota$

$$\iota(\exists x:T.A) = \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \text{falsch} \text{ für alle } u \in \iota(T) \\ \text{wahr} & \text{sonst} \end{cases}$$

SEMANTIK DER PRÄDIKATENLOGIK (II) – KLASSISCH

FORTSETZUNG VON ι AUF ZUSAMMENGESETZTE FORMELN

$$\iota(\neg A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{falsch} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \wedge B) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ und } \iota(B) = \text{wahr} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \vee B) = \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } \iota(A) = \text{falsch} \text{ und } \iota(B) = \text{falsch} \\ \text{wahr} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(A \Rightarrow B) = \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } \iota(A) = \text{wahr} \text{ und } \iota(B) = \text{falsch} \\ \text{wahr} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\iota(\forall x:T.A) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \text{wahr} \text{ für alle } u \in \iota(T) \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

$\iota_x^u(x) = u, \text{ sonst } \iota_x^u = \iota$

$$\iota(\exists x:T.A) = \begin{cases} \text{falsch} & \text{falls } \iota_x^u(A) = \text{falsch} \text{ für alle } u \in \iota(T) \\ \text{wahr} & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist das wirklich dasselbe?

- Was genau heißt **oder**, **wann immer**, **es gibt**?

- Gilt $A \vee B$, wenn A und B nicht beide falsch sind?
- Gilt $A \Rightarrow B$, wenn A falsch oder B wahr ist?
- Gilt $\exists x. A$, wenn A nicht für alle x falsch ist?

- Was genau heißt **oder**, **wann immer**, **es gibt**?
 - Gilt $A \vee B$, *wenn man angeben kann, welches von beiden wahr ist?*
 - Gilt $A \Rightarrow B$, *wenn man zeigen kann, wie B aus A folgt?*
 - Gilt $\exists x. A$, *wenn man ein x angeben kann, für das A wahr ist?*

INTUITIONISTISCHE VS. KLASSISCHE MATHEMATIK

- Was genau heißt **oder**, **wann immer**, **es gibt**?
 - Gilt $A \vee B$, *wenn man angeben kann, welches von beiden wahr ist?*
 - Gilt $A \Rightarrow B$, *wenn man zeigen kann, wie B aus A folgt?*
 - Gilt $\exists x. A$, *wenn man ein x angeben kann, für das A wahr ist?*
- Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten: $A \vee \neg A$
 - Heißt “*Eine Aussage ist wahr oder ihr Gegenteil ist wahr*”
 - Grundannahme der “**klassischen**” Mathematik

INTUITIONISTISCHE VS. KLASSISCHE MATHEMATIK

- Was genau heißt **oder**, **wann immer**, **es gibt**?
 - Gilt $A \vee B$, *wenn man angeben kann, welches von beiden wahr ist?*
 - Gilt $A \Rightarrow B$, *wenn man zeigen kann, wie B aus A folgt?*
 - Gilt $\exists x. A$, *wenn man ein x angeben kann, für das A wahr ist?*
- Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten: $A \vee \neg A$
 - Heißt “*Eine Aussage ist wahr oder ihr Gegenteil ist wahr*”
 - Grundannahme der “**klassischen**” Mathematik – *aber unbeweisbar*
 - Nicht identisch mit: “*Eine Aussage ist wahr oder falsch*”

INTUITIONISTISCHE VS. KLASSISCHE MATHEMATIK

- Was genau heißt **oder**, **wann immer**, **es gibt**?
 - Gilt $A \vee B$, *wenn man angeben kann, welches von beiden wahr ist?*
 - Gilt $A \Rightarrow B$, *wenn man zeigen kann, wie B aus A folgt?*
 - Gilt $\exists x. A$, *wenn man ein x angeben kann, für das A wahr ist?*
- Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten: $A \vee \neg A$
 - Heißt “*Eine Aussage ist wahr oder ihr Gegenteil ist wahr*”
 - Grundannahme der “**klassischen**” Mathematik – *aber unbeweisbar*
 - Nicht identisch mit: “*Eine Aussage ist wahr oder falsch*”
- **Intuitionistische** (konstruktive) Mathematik
 - Versteht alle mathematischen Aussagen **konstruktiv**
 - Ist für Schließen über Algorithmen naheliegender
 - Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten wird **Entscheidbarkeitsaussage**
 - Formaler Unterschied gering aber Beweise werden z.T. komplizierter

NICHTKONSTRUKTIVE MATHEMATISCHE GESETZE

- $\neg\neg A \Rightarrow A$

- Wenn das Gegenteil falsch ist, dann muß eine Aussage nicht wahr sein
- Der Widerspruchsbeweis sagt nicht, warum die Aussage wahr sein soll

NICHTKONSTRUKTIVE MATHEMATISCHE GESETZE

- $\neg\neg A \Rightarrow A$
 - Wenn das Gegenteil falsch ist, dann muß eine Aussage nicht wahr sein
 - Der Widerspruchsbeweis sagt nicht, warum die Aussage wahr sein soll
 - Äquivalent zu $A \vee \neg A$

NICHTKONSTRUKTIVE MATHEMATISCHE GESETZE

- $\neg\neg A \Rightarrow A$
 - Wenn das Gegenteil falsch ist, dann muß eine Aussage nicht wahr sein
 - Der Widerspruchsbeweis sagt nicht, warum die Aussage wahr sein soll
 - Äquivalent zu $A \vee \neg A$
- $A \Rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B$
 - Wenn wir wissen warum eine Aussage aus einer anderen folgt, dann wissen wir noch nicht ob die erste falsch oder die zweite wahr ist

NICHTKONSTRUKTIVE MATHEMATISCHE GESETZE

- $\neg\neg A \Rightarrow A$
 - Wenn das Gegenteil falsch ist, dann muß eine Aussage nicht wahr sein
 - Der Widerspruchsbeweis sagt nicht, warum die Aussage wahr sein soll
 - Äquivalent zu $A \vee \neg A$
- $A \Rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B$
 - Wenn wir wissen warum eine Aussage aus einer anderen folgt, dann wissen wir noch nicht ob die erste falsch oder die zweite wahr ist
- $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow A \vee B$
 - Wenn zwei Aussagen nicht gleichzeitig falsch sind, dann ist noch nicht klar, welche von beiden wahr ist.

NICHTKONSTRUKTIVE MATHEMATISCHE GESETZE

- $\neg\neg A \Rightarrow A$
 - Wenn das Gegenteil falsch ist, dann muß eine Aussage nicht wahr sein
 - Der Widerspruchsbeweis sagt nicht, warum die Aussage wahr sein soll
 - Äquivalent zu $A \vee \neg A$
- $A \Rightarrow B \Rightarrow \neg A \vee B$
 - Wenn wir wissen warum eine Aussage aus einer anderen folgt, dann wissen wir noch nicht ob die erste falsch oder die zweite wahr ist
- $\neg(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow A \vee B$
 - Wenn zwei Aussagen nicht gleichzeitig falsch sind, dann ist noch nicht klar, welche von beiden wahr ist.
- $\neg(\forall x:T. \neg P(x)) \Rightarrow \exists x:T. P(x)$
 - Wenn eine Aussage nicht für alle Elemente falsch ist, dann wissen wir noch nicht, für welches sie wahr ist

INTERPRETATION VON FORMELN

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\mathbf{x}) = \textit{dreizehn}$

- $\iota(\leq(\max(2,3,4),7))$

INTERPRETATION VON FORMELN

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\mathbf{x}) = \textit{dreizehn}$

- $\iota(\leq(\max(2,3,4),7))$
 $= \iota(\leq)(\iota(\max(2,3,4)),\iota(7))$

INTERPRETATION VON FORMELN

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\mathbf{x}) = \textit{dreizehn}$

- $\iota(\leq(\max(2,3,4),7))$
= $\iota(\leq)(\iota(\max(2,3,4)),\iota(7))$
= $\Pi_{\leq}(\iota(\max)(\iota(2),\iota(3),\iota(4)), \textit{sieben})$

INTERPRETATION VON FORMELN

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\mathbf{x}) = \textit{dreizehn}$

- $\iota(\leq(\max(2,3,4),7))$
= $\iota(\leq)(\iota(\max(2,3,4)),\iota(7))$
= $\Pi_{\leq}(\iota(\max)(\iota(2),\iota(3),\iota(4)), \textit{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\phi_{\max}(\textit{zwei},\textit{drei},\textit{vier}), \textit{sieben})$

INTERPRETATION VON FORMELN

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\mathbf{x}) = \textit{dreizehn}$

- $$\begin{aligned} & \iota(\leq(\max(2,3,4),7)) \\ &= \iota(\leq)(\iota(\max(2,3,4)),\iota(7)) \\ &= \Pi_{\leq}(\iota(\max)(\iota(2),\iota(3),\iota(4)), \textit{sieben}) \\ &= \Pi_{\leq}(\phi_{\max}(\textit{zwei},\textit{drei},\textit{vier}), \textit{sieben}) \\ &= \Pi_{\leq}(\textit{vier}, \textit{sieben}) \end{aligned}$$

INTERPRETATION VON FORMELN

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\mathbf{x}) = \textit{dreizehn}$

- $\iota(\leq(\max(2,3,4),7))$
= $\iota(\leq)(\iota(\max(2,3,4)),\iota(7))$
= $\Pi_{\leq}(\iota(\max)(\iota(2),\iota(3),\iota(4)), \textit{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\phi_{\max}(\textit{zwei},\textit{drei},\textit{vier}), \textit{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\textit{vier}, \textit{sieben})$
= **wahr**

INTERPRETATION VON FORMELN

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\mathbf{x}) = \textit{dreizehn}$

- $\iota(\leq(\max(2,3,4),7))$
= $\iota(\leq)(\iota(\max(2,3,4)),\iota(7))$
= $\Pi_{\leq}(\iota(\max)(\iota(2),\iota(3),\iota(4)), \textit{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\phi_{\max}(\textit{zwei},\textit{drei},\textit{vier}), \textit{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\textit{vier}, \textit{sieben})$
= **wahr**
- $\iota(\exists \mathbf{x}:\mathbb{N}. \leq(\max(2,3,4),\mathbf{x}))$

INTERPRETATION VON FORMELN

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\mathbf{x}) = \textit{dreizehn}$

- $\iota(\leq(\max(2,3,4),7))$
= $\iota(\leq)(\iota(\max(2,3,4)),\iota(7))$
= $\Pi_{\leq}(\iota(\max)(\iota(2),\iota(3),\iota(4)), \textit{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\phi_{\max}(\textit{zwei},\textit{drei},\textit{vier}), \textit{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\textit{vier}, \textit{sieben})$
= **wahr**
- $\iota(\exists \mathbf{x}:\mathbb{N}. \leq(\max(2,3,4),\mathbf{x}))$
= **wahr** gdw. $\iota_x^u(\leq(\max(2,3,4),\mathbf{x})) = \textit{wahr}$ für ein $u \in \iota(\mathbb{N})$ ist

INTERPRETATION VON FORMELN

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\mathbf{x}) = \textit{dreizehn}$

- $\iota(\leq(\max(2,3,4),7))$
= $\iota(\leq)(\iota(\max(2,3,4)),\iota(7))$
= $\Pi_{\leq}(\iota(\max)(\iota(2),\iota(3),\iota(4)), \textit{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\phi_{\max}(\textit{zwei},\textit{drei},\textit{vier}), \textit{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\textit{vier}, \textit{sieben})$
= **wahr**
- $\iota(\exists \mathbf{x}:\mathbb{N}. \leq(\max(2,3,4),\mathbf{x}))$
= **wahr** gdw. $\iota_x^u(\leq(\max(2,3,4),\mathbf{x})) = \textit{wahr}$ für ein $u \in \iota(\mathbb{N})$ ist
= $:$
= **wahr** gdw. $\Pi_{\leq}(\textit{vier},\iota_x^u(\mathbf{x})) = \textit{wahr}$ für eine Zahl u

INTERPRETATION VON FORMELN

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\mathbf{x}) = \textit{dreizehn}$

- $\iota(\leq(\max(2,3,4),7))$
= $\iota(\leq)(\iota(\max(2,3,4)),\iota(7))$
= $\Pi_{\leq}(\iota(\max)(\iota(2),\iota(3),\iota(4)), \textit{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\phi_{\max}(\textit{zwei},\textit{drei},\textit{vier}), \textit{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\textit{vier}, \textit{sieben})$
= **wahr**
- $\iota(\exists \mathbf{x}:\mathbb{N}. \leq(\max(2,3,4),\mathbf{x}))$
= **wahr** gdw. $\iota_x^u(\leq(\max(2,3,4),\mathbf{x})) = \textit{wahr}$ für ein $u \in \iota(\mathbb{N})$ ist
= :
= **wahr** gdw. $\Pi_{\leq}(\textit{vier},\iota_x^u(\mathbf{x})) = \textit{wahr}$ für eine Zahl u
= **wahr** gdw. $\Pi_{\leq}(\textit{vier},u) = \textit{wahr}$ für eine Zahl u

INTERPRETATION VON FORMELN

Sei ι die “Standardinterpretation” und $\iota(\mathbf{x}) = \text{dreizehn}$

- $\iota(\leq(\max(2,3,4),7))$
= $\iota(\leq)(\iota(\max(2,3,4)),\iota(7))$
= $\Pi_{\leq}(\iota(\max)(\iota(2),\iota(3),\iota(4)), \text{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\phi_{\max}(\text{zwei},\text{drei},\text{vier}), \text{sieben})$
= $\Pi_{\leq}(\text{vier}, \text{sieben})$
= **wahr**
- $\iota(\exists \mathbf{x}:\mathbb{N}. \leq(\max(2,3,4),\mathbf{x}))$
= **wahr** gdw. $\iota_x^u(\leq(\max(2,3,4),\mathbf{x})) = \text{wahr}$ für ein $u \in \iota(\mathbb{N})$ ist
= :
= **wahr** gdw. $\Pi_{\leq}(\text{vier},\iota_x^u(\mathbf{x})) = \text{wahr}$ für eine Zahl u
= **wahr** gdw. $\Pi_{\leq}(\text{vier},u) = \text{wahr}$ für eine Zahl u
= **wahr** (wähle $u = \text{fünf}$)

MODELLE UND GÜLTIGKEIT

- **Modell $\mathcal{M}$ von A**

$$(\mathcal{M} \models A)$$

- Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \text{wahr}$

MODELLE UND GÜLTIGKEIT

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** **$(\mathcal{M} \models A)$**
 - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \text{wahr}$
- **A gültig** jede Interpretation ist ein Modell für A

MODELLE UND GÜLTIGKEIT

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** $(\mathcal{M} \models A)$
 - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \text{wahr}$
- **A gültig** jede Interpretation ist ein Modell für A
- **A erfüllbar** es gibt ein Modell für A

MODELLE UND GÜLTIGKEIT

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** **$(\mathcal{M} \models A)$**
 - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \text{wahr}$
- **A gültig** jede Interpretation ist ein Modell für A
- **A erfüllbar** es gibt ein Modell für A
- **A widerlegbar** es gibt ein Modell für $\neg A$

MODELLE UND GÜLTIGKEIT

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** $(\mathcal{M} \models A)$
 - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \text{wahr}$
- **A gültig** jede Interpretation ist ein Modell für A
- **A erfüllbar** es gibt ein Modell für A
- **A widerlegbar** es gibt ein Modell für $\neg A$
- **A widersprüchlich** es gibt kein Modell für A

MODELLE UND GÜLTIGKEIT

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** **$(\mathcal{M} \models A)$**
 - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \text{wahr}$
- **A gültig** jede Interpretation ist ein Modell für A
- **A erfüllbar** es gibt ein Modell für A
- **A widerlegbar** es gibt ein Modell für $\neg A$
- **A widersprüchlich** es gibt kein Modell für A
- **A folgt logisch aus Formelmenge $\mathcal{E}$** **$(\mathcal{E} \models A)$**
 - Aus $\mathcal{I} \models E$ für alle $E \in \mathcal{E}$ folgt $\mathcal{I} \models A$ (semantisch gültiger Schluß)

MODELLE UND GÜLTIGKEIT

- **Modell $\mathcal{M}$ von A** **$(\mathcal{M} \models A)$**
 - Interpretation $\mathcal{M} = (\iota, \mathcal{U})$ mit $\iota(A) = \text{wahr}$
- **A gültig** jede Interpretation ist ein Modell für A
- **A erfüllbar** es gibt ein Modell für A
- **A widerlegbar** es gibt ein Modell für $\neg A$
- **A widersprüchlich** es gibt kein Modell für A
- **A folgt logisch aus Formelmenge $\mathcal{E}$** **$(\mathcal{E} \models A)$**
 - Aus $\mathcal{I} \models E$ für alle $E \in \mathcal{E}$ folgt $\mathcal{I} \models A$ (semantisch gültiger Schluß)
- **Theorie $\mathcal{T}$**
 - Erfüllbare Formelmenge mit allen Formeln, die daraus logisch folgen

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4,+(3,1))) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4,+(3,1))) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

erfüllbar, nicht gültig

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4,+(3,1))) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg \leq(4,+(3,1))$$

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4,+(3,1))) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg \leq(4,+(3,1))$$

unerfüllbar

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4,+(3,1))) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg \leq(4,+(3,1))$$

unerfüllbar

$$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4,+(3,1))) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg \leq(4,+(3,1))$$

unerfüllbar

$$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4) \text{ gültig}$$

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4,+(3,1))) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg \leq(4,+(3,1))$$

unerfüllbar

$$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4) \text{ gültig}$$

$$\forall x:\mathbb{N}. x < 0$$

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4,+(3,1))) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg \leq(4,+(3,1))$$

unerfüllbar

$$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4) \text{ gültig}$$

$$\forall x:\mathbb{N}. x < 0$$

erfüllbar, nicht gültig

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4, +(3, 1))) \Rightarrow \leq(+(3, 1), 4)) \Rightarrow \leq(+(3, 1), 4)$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\leq(4, +(3, 1)) \wedge \neg \leq(4, +(3, 1))$$

unerfüllbar

$$(\leq(4, +(3, 1)) \wedge \leq(+(3, 1), 4)) \Rightarrow \leq(+(3, 1), 4) \text{ gültig}$$

$$\forall x:\mathbb{N}. x < 0$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\exists x:\mathbb{N}. x > 0$$

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4,+(3,1))) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg \leq(4,+(3,1))$$

unerfüllbar

$$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4) \text{ gültig}$$

$$\forall x:\mathbb{N}. x < 0$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\exists x:\mathbb{N}. x > 0$$

erfüllbar, nicht gültig

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4, +(3, 1))) \Rightarrow \leq(+(3, 1), 4)) \Rightarrow \leq(+(3, 1), 4)$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\leq(4, +(3, 1)) \wedge \neg \leq(4, +(3, 1))$$

unerfüllbar

$$(\leq(4, +(3, 1)) \wedge \leq(+(3, 1), 4)) \Rightarrow \leq(+(3, 1), 4) \text{ gültig}$$

$$\forall x:\mathbb{N}. x < 0$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\exists x:\mathbb{N}. x > 0$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\neg(\exists x:\mathbb{N}. x > 0)$$

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4,+(3,1))) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg \leq(4,+(3,1))$$

unerfüllbar

$$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4) \text{ gültig}$$

$$\forall x:\mathbb{N}. x < 0$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\exists x:\mathbb{N}. x > 0$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\neg(\exists x:\mathbb{N}. x > 0)$$

erfüllbar, nicht gültig

GÜLTIGKEIT VON FORMELN

$$(\leq(4,+(3,1))) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4)$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\leq(4,+(3,1)) \wedge \neg \leq(4,+(3,1))$$

unerfüllbar

$$(\leq(4,+(3,1)) \wedge \leq(+(3,1),4)) \Rightarrow \leq(+(3,1),4) \text{ gültig}$$

$$\forall x:\mathbb{N}. x < 0$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\exists x:\mathbb{N}. x > 0$$

erfüllbar, nicht gültig

$$\neg(\exists x:\mathbb{N}. x > 0)$$

erfüllbar, nicht gültig

Symbole $\leq$, $+$, 3 , 4 , 1 , $\mathbb{N}$, $>$ haben keine feste Bedeutung

EINE ALTERNATIVE FORM, SEMANTIK ZU DEFINIEREN

- **Interpretation in Zielsprache ist unintuitiv**
 - Bedeutung der Zielsprache muß präzisiert werden
 - Für grundlegende Objektsprachen sollte man dies besser direkt tun

EINE ALTERNATIVE FORM, SEMANTIK ZU DEFINIEREN

- **Interpretation in Zielsprache ist unintuitiv**
 - Bedeutung der Zielsprache muß präzisiert werden
 - Für grundlegende Objektsprachen sollte man dies besser direkt tun
- **Mengentheorie ist keine konstruktive Zielsprache**
 - Objekte haben keine Standardrepräsentation
 - Operationen auf Struktur von Objekten sind nicht beschreibbar

EINE ALTERNATIVE FORM, SEMANTIK ZU DEFINIEREN

- **Interpretation in Zielsprache ist unintuitiv**
 - Bedeutung der Zielsprache muß präzisiert werden
 - Für grundlegende Objektsprachen sollte man dies besser direkt tun
- **Mengentheorie ist keine konstruktive Zielsprache**
 - Objekte haben keine Standardrepräsentation
 - Operationen auf Struktur von Objekten sind nicht beschreibbar
- **Direkte Semantik präzisiert Intuition**
 - **Urteile** weisen Basiskonzepten intuitiv verständliche Bedeutung zu
 - Explizite Urteile erklären Bedeutung atomarer Konstrukte
 - Homomorphe Fortsetzung auf komplexe Konstrukte

EINE ALTERNATIVE FORM, SEMANTIK ZU DEFINIEREN

- **Interpretation in Zielsprache ist unintuitiv**
 - Bedeutung der Zielsprache muß präzisiert werden
 - Für grundlegende Objektsprachen sollte man dies besser direkt tun
- **Mengentheorie ist keine konstruktive Zielsprache**
 - Objekte haben keine Standardrepräsentation
 - Operationen auf Struktur von Objekten sind nicht beschreibbar
- **Direkte Semantik präzisiert Intuition**
 - **Urteile** weisen Basiskonzepten intuitiv verständliche Bedeutung zu
 - Explizite Urteile erklären Bedeutung atomarer Konstrukte
 - Homomorphe Fortsetzung auf komplexe Konstrukte
 - Beschreibung verbal oder in formaler Metasprache
 - Formale Semantik erleichtert Entwicklung von Inferenzregeln
ist aber selbst kein Beweissystem

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich
 - Gebe explizite Evidenz für Gültigkeit von $4 = +(1,3), \dots$

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich
 - Gebe explizite Evidenz für Gültigkeit von $4 = +(1,3), \dots$
 - Gebe explizite Evidenz für Widersprüchlichkeit von $0=1, \dots$

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- **Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich**
 - Gebe **explizite Evidenz für Gültigkeit** von $4 = +(1,3), \dots$
 - Gebe **explizite Evidenz für Widersprüchlichkeit** von $0=1, \dots$
 - Unbeweisbare oder uninterpretierte Formeln sind **ohne Evidenz**

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- **Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich**
 - Gebe **explizite Evidenz für Gültigkeit** von $4 = +(1,3), \dots$
 - Gebe **explizite Evidenz für Widersprüchlichkeit** von $0=1, \dots$
 - Unbeweisbare oder uninterpretierte Formeln sind **ohne Evidenz**
- **Evidenz für komplexe Formeln wird konstruktiv aufgebaut**

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- **Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich**
 - Gebe **explizite Evidenz für Gültigkeit** von $4 = +(1,3), \dots$
 - Gebe **explizite Evidenz für Widersprüchlichkeit** von $0=1, \dots$
 - Unbeweisbare oder uninterpretierte Formeln sind **ohne Evidenz**
- **Evidenz für komplexe Formeln wird konstruktiv aufgebaut**
 - e Evidenz für Widersprüchlichkeit von $A \quad \mapsto \quad e$ Evidenz für $\neg A$

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- **Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich**
 - Gebe **explizite Evidenz für Gültigkeit** von $4 = +(1,3), \dots$
 - Gebe **explizite Evidenz für Widersprüchlichkeit** von $0=1, \dots$
 - Unbeweisbare oder uninterpretierte Formeln sind **ohne Evidenz**
- **Evidenz für komplexe Formeln wird konstruktiv aufgebaut**
 - e Evidenz für Widersprüchlichkeit von $A \quad \mapsto \quad e$ Evidenz für $\neg A$
 - e_a, e_b Evidenzen für A bzw. $B \quad \mapsto \quad (e_a, e_b)$ Evidenz für $A \wedge B$

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- **Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich**
 - Gebe **explizite Evidenz für Gültigkeit** von $4 = +(1,3), \dots$
 - Gebe **explizite Evidenz für Widersprüchlichkeit** von $0=1, \dots$
 - Unbeweisbare oder uninterpretierte Formeln sind **ohne Evidenz**
- **Evidenz für komplexe Formeln wird konstruktiv aufgebaut**
 - e Evidenz für Widersprüchlichkeit von A $\mapsto e$ Evidenz für $\neg A$
 - e_a, e_b Evidenzen für A bzw. B $\mapsto (e_a, e_b)$ Evidenz für $A \wedge B$
 - e_a Evidenz für A $\mapsto \text{inl}(e_a)$ Evidenz für $A \vee B$

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- **Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich**
 - Gebe **explizite Evidenz für Gültigkeit** von $4 = +(1,3), \dots$
 - Gebe **explizite Evidenz für Widersprüchlichkeit** von $0=1, \dots$
 - Unbeweisbare oder uninterpretierte Formeln sind **ohne Evidenz**
- **Evidenz für komplexe Formeln wird konstruktiv aufgebaut**
 - e Evidenz für Widersprüchlichkeit von A $\mapsto e$ Evidenz für $\neg A$
 - e_a, e_b Evidenzen für A bzw. B $\mapsto (e_a, e_b)$ Evidenz für $A \wedge B$
 - e_a Evidenz für A $\mapsto \text{inl}(e_a)$ Evidenz für $A \vee B$
 - e_b Evidenz für B $\mapsto \text{inr}(e_b)$ Evidenz für $A \vee B$

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- **Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich**
 - Gebe **explizite Evidenz für Gültigkeit** von $4 = +(1,3), \dots$
 - Gebe **explizite Evidenz für Widersprüchlichkeit** von $0=1, \dots$
 - Unbeweisbare oder uninterpretierte Formeln sind **ohne Evidenz**
- **Evidenz für komplexe Formeln wird konstruktiv aufgebaut**
 - e Evidenz für Widersprüchlichkeit von $A \quad \mapsto \quad e$ Evidenz für $\neg A$
 - e_a, e_b Evidenzen für A bzw. $B \quad \mapsto \quad (e_a, e_b)$ Evidenz für $A \wedge B$
 - e_a Evidenz für $A \quad \mapsto \quad \text{inl}(e_a)$ Evidenz für $A \vee B$
 - e_b Evidenz für $B \quad \mapsto \quad \text{inr}(e_b)$ Evidenz für $A \vee B$
 - e_b Evidenz für B wenn e_a Evidenz für $A \mapsto \lambda e_a. e_b$ Evidenz für $A \Rightarrow B$

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- **Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich**
 - Gebe **explizite Evidenz für Gültigkeit** von $4 = +(1,3), \dots$
 - Gebe **explizite Evidenz für Widersprüchlichkeit** von $0=1, \dots$
 - Unbeweisbare oder uninterpretierte Formeln sind **ohne Evidenz**
- **Evidenz für komplexe Formeln wird konstruktiv aufgebaut**
 - e Evidenz für Widersprüchlichkeit von A $\mapsto e$ Evidenz für $\neg A$
 - e_a, e_b Evidenzen für A bzw. B $\mapsto (e_a, e_b)$ Evidenz für $A \wedge B$
 - e_a Evidenz für A $\mapsto \text{inl}(e_a)$ Evidenz für $A \vee B$
 - e_b Evidenz für B $\mapsto \text{inr}(e_b)$ Evidenz für $A \vee B$
 - e_b Evidenz für B wenn e_a Evidenz für A $\mapsto \lambda e_a. e_b$ Evidenz für $A \Rightarrow B$
 - $e_a[a]$ Evidenz für $A[a]$ $\mapsto (a, e_a[a])$ Evidenz für $\exists x:T. A$

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- **Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich**
 - Gebe **explizite Evidenz für Gültigkeit** von $4 = +(1,3), \dots$
 - Gebe **explizite Evidenz für Widersprüchlichkeit** von $0=1, \dots$
 - Unbeweisbare oder uninterpretierte Formeln sind **ohne Evidenz**
- **Evidenz für komplexe Formeln wird konstruktiv aufgebaut**
 - e Evidenz für Widersprüchlichkeit von A $\mapsto e$ Evidenz für $\neg A$
 - e_a, e_b Evidenzen für A bzw. B $\mapsto (e_a, e_b)$ Evidenz für $A \wedge B$
 - e_a Evidenz für A $\mapsto \text{inl}(e_a)$ Evidenz für $A \vee B$
 - e_b Evidenz für B $\mapsto \text{inr}(e_b)$ Evidenz für $A \vee B$
 - e_b Evidenz für B wenn e_a Evidenz für A $\mapsto \lambda e_a. e_b$ Evidenz für $A \Rightarrow B$
 - $e_a[a]$ Evidenz für $A[a]$ $\mapsto (a, e_a[a])$ Evidenz für $\exists x:T. A$
 - $e_a[a]$ Evidenz für $A[a]$ für alle a in T $\mapsto \lambda a. e_a[a]$ Evidenz für $\forall x:T. A$

BEISPIEL: EVIDENZSEMANTIK FÜR PRÄDIKATENLOGIK

Welche Evidenz gibt es für Gültigkeit von Formeln?

- **Atomare Formeln sind intuitiv gültig oder widersprüchlich**
 - Gebe **explizite Evidenz für Gültigkeit** von $4 = +(1,3), \dots$
 - Gebe **explizite Evidenz für Widersprüchlichkeit** von $0=1, \dots$
 - Unbeweisbare oder uninterpretierte Formeln sind **ohne Evidenz**
- **Evidenz für komplexe Formeln wird konstruktiv aufgebaut**
 - e Evidenz für Widersprüchlichkeit von A $\mapsto e$ Evidenz für $\neg A$
 - e_a, e_b Evidenzen für A bzw. B $\mapsto (e_a, e_b)$ Evidenz für $A \wedge B$
 - e_a Evidenz für A $\mapsto \text{inl}(e_a)$ Evidenz für $A \vee B$
 - e_b Evidenz für B $\mapsto \text{inr}(e_b)$ Evidenz für $A \vee B$
 - e_b Evidenz für B wenn e_a Evidenz für A $\mapsto \lambda e_a. e_b$ Evidenz für $A \Rightarrow B$
 - $e_a[a]$ Evidenz für $A[a]$ $\mapsto (a, e_a[a])$ Evidenz für $\exists x:T. A$
 - $e_a[a]$ Evidenz für $A[a]$ für alle a in T $\mapsto \lambda a. e_a[a]$ Evidenz für $\forall x:T. A$

Aufwendiger, aber präziser als modelltheoretische Semantik

● Erlaubte Symbole

– $+$, $-$, $*$, $/$, 0 , 1 , 2 , 3 , $\dots$ sowie $\mathbb{Z}$, $\in$, Variablen und logische Konnektive

- **Erlaubte Symbole**

- $+$, $-$, $*$, $/$, 0 , 1 , 2 , 3 , $\dots$ sowie $\mathbb{Z}$, $\in$, Variablen und logische Konnektive

- **Terme:**

- Variablen x oder Konstanten 0 , 1 , 2 , 3 , $\dots$

- Funktionsanwendungen $-t$, t_1+t_2 , t_1-t_2 , t_1*t_2 , t_1/t_2

- **Erlaubte Symbole**

- $+$, $-$, $*$, $/$, 0 , 1 , 2 , 3 , ... sowie $\mathbb{Z}$, $\in$, Variablen und logische Konnektive

- **Terme:**

- Variablen x oder Konstanten 0 , 1 , 2 , 3 , ...
- Funktionsanwendungen $-t$, t_1+t_2 , t_1-t_2 , t_1*t_2 , t_1/t_2

- **Formeln:**

- atomare Formel: $t \in \mathbb{Z}$
- zusammengesetzte Formeln wie in der Prädikatenlogik

- **Erlaubte Symbole**

- $+$, $-$, $*$, $/$, 0 , 1 , 2 , 3 , $\dots$ sowie $\mathbb{Z}$, $\in$, Variablen und logische Konnektive

- **Terme:**

- Variablen x oder Konstanten 0 , 1 , 2 , 3 , $\dots$
- Funktionsanwendungen $-t$, t_1+t_2 , t_1-t_2 , t_1*t_2 , t_1/t_2

- **Formeln:**

- atomare Formel: $t \in \mathbb{Z}$
- zusammengesetzte Formeln wie in der Prädikatenlogik

- **Formale Urteile für atomare Formeln**

- $0 \in \mathbb{Z}$, $1 \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Z}$, $\dots$
- $-t \in \mathbb{Z}$ falls $t \in \mathbb{Z}$
- $t_1+t_2 \in \mathbb{Z}$, $t_1-t_2 \in \mathbb{Z}$, $t_1*t_2 \in \mathbb{Z}$, $t_1/t_2 \in \mathbb{Z}$ falls $t_1 \in \mathbb{Z}$ und $t_2 \in \mathbb{Z}$

- **Erlaubte Symbole**

- $+$, $-$, $*$, $/$, 0 , 1 , 2 , 3 , $\dots$ sowie $\mathbb{Z}$, $\in$, Variablen und logische Konnektive

- **Terme:**

- Variablen x oder Konstanten 0 , 1 , 2 , 3 , $\dots$
- Funktionsanwendungen $-t$, t_1+t_2 , t_1-t_2 , t_1*t_2 , t_1/t_2

- **Formeln:**

- atomare Formel: $t \in \mathbb{Z}$
- zusammengesetzte Formeln wie in der Prädikatenlogik

- **Formale Urteile für atomare Formeln**

- $0 \in \mathbb{Z}$, $1 \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Z}$, $\dots$
- $-t \in \mathbb{Z}$ falls $t \in \mathbb{Z}$
- $t_1+t_2 \in \mathbb{Z}$, $t_1-t_2 \in \mathbb{Z}$, $t_1*t_2 \in \mathbb{Z}$, $t_1/t_2 \in \mathbb{Z}$ falls $t_1 \in \mathbb{Z}$ und $t_2 \in \mathbb{Z}$

- **Urteile für zusammengesetzte Formeln wie zuvor**

FORMALE BEWEISFÜHRUNG

Syntaktische Manipulation formaler Ausdrücke unter Berücksichtigung der Semantik

Syntaktische Manipulation formaler Ausdrücke unter Berücksichtigung der Semantik

- **Konversion:** Umformung in semantisch äquivalente Ausdrücke

$$4+5 \rightarrow 9$$

$$A \wedge (A \vee B) \rightarrow A$$

$$d/dx(u + v) \rightarrow du/dx + dv/dx$$

- Konversion ist **wertenthaltende** Termersetzung

Syntaktische Manipulation formaler Ausdrücke unter Berücksichtigung der Semantik

- **Konversion:** Umformung in semantisch äquivalente Ausdrücke

$$\begin{array}{lll} 4+5 & \rightarrow & 9 \\ A \wedge (A \vee B) & \rightarrow & A \\ d/dx(u+v) & \rightarrow & du/dx + dv/dx \end{array}$$

– Konversion ist **werterhaltende** Termersetzung

- **Inferenz:** Erzeugung logischer Konsequenzen einer Formelmenge

$$\text{aus } A \text{ und } A \Rightarrow B \text{ folgt } B: \quad \frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

- Inferenz erhält **Gültigkeit** von Aussagen aber erlaubt **Abschwächung**
- Inferenz ist vielseitiger für logisches Schließen

GRUNDKONZEPTE VON (INFERENZ)KALKÜLEN

- **Regelschema** $\frac{A_1, \dots, A_n}{C}$: aus $\underbrace{A_1 \text{ und } \dots A_n}_{\text{Prämissen}}$ folgt $\underbrace{C}_{\text{Konklusion}}$
 - **Axiom**: Regel ohne Prämissen
 - $\Gamma \vdash_{rs} C$: Konkrete Anwendung des Regelschemas rs

GRUNDKONZEPTE VON (INFERENZ)KALKÜLEN

- **Regelschema** $\frac{A_1, \dots, A_n}{C}$: aus $\underbrace{A_1 \text{ und } \dots A_n}_{\text{Prämissen}}$ folgt $\underbrace{C}_{\text{Konklusion}}$
 - **Axiom**: Regel ohne Prämissen
 - $\Gamma \vdash_{rs} C$: Konkrete Anwendung des Regelschemas rs
- **Ableitung**
 - Folge von Formeln $F_1, \dots, F_k$ wobei Formel F_i durch Anwendung eines Regelschemas auf einige der Formeln $F_1, \dots, F_{i-1}$ entsteht

GRUNDKONZEPTE VON (INFERENZ)KALKÜLEN

- **Regelschema** $\frac{A_1, \dots, A_n}{C}$: aus $\underbrace{A_1 \text{ und } \dots A_n}_{\text{Pr\"{a}missen}}$ folgt $\underbrace{C}_{\text{Konklusion}}$
 - **Axiom**: Regel ohne Pr\"{a}missen
 - $\Gamma \vdash_{rs} C$: Konkrete Anwendung des Regelschemas rs
- **Ableitung**
 - Folge von Formeln $F_1, \dots, F_k$ wobei Formel F_i durch Anwendung eines Regelschemas auf einige der Formeln $F_1, \dots, F_{i-1}$ entsteht
- **Theorem**
 - Formel, die sich durch Anwendung endlich vieler Regeln ableiten l\"{a}ßt

GRUNDKONZEPTE VON (INFERENZ)KALKÜLEN

- **Regelschema** $\frac{A_1, \dots, A_n}{C}$: aus $\underbrace{A_1 \text{ und } \dots A_n}_{\text{Prämissen}}$ folgt $\underbrace{C}_{\text{Konklusion}}$
 - **Axiom**: Regel ohne Prämissen
 - $\Gamma \vdash_{rs} C$: Konkrete Anwendung des Regelschemas rs
- **Ableitung**
 - Folge von Formeln $F_1, \dots, F_k$ wobei Formel F_i durch Anwendung eines Regelschemas auf einige der Formeln $F_1, \dots, F_{i-1}$ entsteht
- **Theorem**
 - Formel, die sich durch Anwendung endlich vieler Regeln ableiten läßt
- **Wahrheit ist nicht dasselbe wie Beweisbarkeit**
 - **Korrektheit** eines Kalküls: alle Theoreme sind gültig
... einer Regel: Gültigkeit der Konklusion folgt aus Gültigkeit der Prämissen
 - **Vollständigkeit**: alle gültigen Aussagen sind Theoreme
 - unmöglich für ausdrucksstarke Theorien (Arithmetik, Analysis, ...)

KALKÜLAUSRICHTUNGEN

Kalküle sind Hilfsmittel, keine Beweismethode

Kalküle sind Hilfsmittel, keine Beweismethode

● Synthetisch

- Bottom-up Vorgehensweise
- Schlüsse von Axiomen zur Aussage
- Übliche Art, fertige Beweise zu präsentieren

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A \wedge B] \quad \wedge -E}{B} \quad \frac{[A \wedge B] \quad \wedge -E}{A} \\
 \hline
 \frac{B \quad A \quad \wedge -I}{B \wedge A} \\
 \hline
 \frac{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A) \quad \Rightarrow -I}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}
 \end{array}$$

Kalküle sind Hilfsmittel, keine Beweismethode

● Synthetisch

- Bottom-up Vorgehensweise
- Schlüsse von Axiomen zur Aussage
- Übliche Art, fertige Beweise zu präsentieren

$$\frac{\frac{\frac{[A \wedge B]}{B} \wedge -E \quad \frac{[A \wedge B]}{A} \wedge -E}{B \wedge A} \wedge -I}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)} \Rightarrow -I$$

● Analytisch

$$\begin{array}{l} \vdash A \wedge B \Rightarrow B \wedge A \quad \text{BY impI} \\ \quad \backslash \\ \quad A \wedge B \vdash B \wedge A \quad \text{BY andE 1} \\ \quad \quad \backslash \\ \quad \quad A, B \vdash B \wedge A \quad \text{BY andI} \\ \quad \quad \quad \backslash \quad \backslash \\ \quad \quad \quad A, B \vdash B \quad \text{BY hypothesis 2} \\ \quad \quad \quad \quad \backslash \\ \quad \quad \quad A, B \vdash A \quad \text{BY hypothesis 1} \end{array}$$

- Schlüsse von Zielaussage zu notwendigen Voraussetzungen
- Top-down Vorgehensweise, hilfreicher für Entwicklung von Beweisen

KALKÜLARTEN

- **Axiom-orientiert: Frege–Hilbert–Kalküle**

- Sehr mächtig, aber aufwendige Beweissuche

(synthetisch)

KALKÜLARTEN

- **Axiom-orientiert: Frege–Hilbert–Kalküle**

- Sehr mächtig, aber aufwendige Beweissuche (synthetisch)

- **Konnektivorientiert**

Natürliches Schließen $\mathcal{NK}, \mathcal{NJ}$ (synthetisch)

- Einfache Regeln für Einführung und Analyse von Konnektiven
- Separate globale Verwaltung von noch offenen Annahmen

Sequenzkalküle $\mathcal{LK}, \mathcal{LJ}$ (synthetisch)

- Natürliche Inferenzregeln mit lokaler Verwaltung von Annahmen

Tableaux-Kalküle (analytisch)

- Kompakte, unabhängig entstandene Variante des Sequenzkalküls

KALKÜLARTEN

- **Axiom-orientiert: Frege–Hilbert–Kalküle**

- Sehr mächtig, aber aufwendige Beweissuche (synthetisch)

- **Konnektivorientiert**

Natürliches Schließen $\mathcal{NK}, \mathcal{NJ}$ (synthetisch)

- Einfache Regeln für Einführung und Analyse von Konnektiven
- Separate globale Verwaltung von noch offenen Annahmen

Sequenzkalküle $\mathcal{LK}, \mathcal{LJ}$ (synthetisch)

- Natürliche Inferenzregeln mit lokaler Verwaltung von Annahmen

Tableaux-Kalküle (analytisch)

- Kompakte, unabhängig entstandene Variante des Sequenzkalküls

Refinement Logic (analytisch)

- Analytischer Sequenzkalkül, **gut für interaktive Beweissuche**

KALKÜLARTEN

- **Axiom-orientiert: Frege–Hilbert–Kalküle**

- Sehr mächtig, aber aufwendige Beweissuche (synthetisch)

- **Konnektivorientiert**

Natürliches Schließen $\mathcal{NK}, \mathcal{NJ}$ (synthetisch)

- Einfache Regeln für Einführung und Analyse von Konnektiven
- Separate globale Verwaltung von noch offenen Annahmen

Sequenzkalküle $\mathcal{LK}, \mathcal{LJ}$ (synthetisch)

- Natürliche Inferenzregeln mit lokaler Verwaltung von Annahmen

Tableaux-Kalküle (analytisch)

- Kompakte, unabhängig entstandene Variante des Sequenzkalküls

Refinement Logic (analytisch)

- Analytischer Sequenzkalkül, **gut für interaktive Beweissuche**

- **Maschinennah: Resolutions-/Konnektionskalküle**

- Maschinennahe analytische Kalküle, gut für automatisches Beweisen

ANHANG

FREGE–HILBERT–KALKÜLE

● Sehr viele Axiomenschemata

- | | |
|--|--|
| (A1) $A \Rightarrow A$ | (A11) $(A \wedge B \vee C) \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ |
| (A2) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ | (A12) $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B \vee C)$ |
| (A3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ | (A13) $(A \vee B) \wedge C \Rightarrow (A \wedge C \vee B \wedge C)$ |
| (A4) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ | (A14) $(A \wedge C \vee B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge C$ |
| (A5) $A \Rightarrow A \vee B$ | (A15) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ |
| (A6) $A \Rightarrow B \vee A$ | (A16) $A \wedge \neg A \Rightarrow B$ |
| (A7) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$ | (A17) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ |
| (A8) $A \wedge B \Rightarrow A$ | (A18) $(A \wedge C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ |
| (A9) $A \wedge B \Rightarrow B$ | (A19) $(A \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg A$ |
| (A10) $(C \Rightarrow A) \Rightarrow ((C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow A \wedge B))$ | $\vdots \quad \quad \vdots$ |

FREGE–HILBERT–KALKÜLE

● Sehr viele Axiomenschemata

- | | |
|--|--|
| (A1) $A \Rightarrow A$ | (A11) $(A \wedge B \vee C) \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ |
| (A2) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ | (A12) $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B \vee C)$ |
| (A3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ | (A13) $(A \vee B) \wedge C \Rightarrow (A \wedge C \vee B \wedge C)$ |
| (A4) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ | (A14) $(A \wedge C \vee B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge C$ |
| (A5) $A \Rightarrow A \vee B$ | (A15) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ |
| (A6) $A \Rightarrow B \vee A$ | (A16) $A \wedge \neg A \Rightarrow B$ |
| (A7) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$ | (A17) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ |
| (A8) $A \wedge B \Rightarrow A$ | (A18) $(A \wedge C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ |
| (A9) $A \wedge B \Rightarrow B$ | (A19) $(A \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg A$ |
| (A10) $(C \Rightarrow A) \Rightarrow ((C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow A \wedge B))$ | $\vdots$ |

● Nur eine Inferenzregel

$$(\text{mp}) \quad \frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

FREGE–HILBERT–KALKÜLE

● Sehr viele Axiomenschemata

- | | |
|--|--|
| (A1) $A \Rightarrow A$ | (A11) $(A \wedge B \vee C) \Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ |
| (A2) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ | (A12) $(A \vee C) \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B \vee C)$ |
| (A3) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ | (A13) $(A \vee B) \wedge C \Rightarrow (A \wedge C \vee B \wedge C)$ |
| (A4) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ | (A14) $(A \wedge C \vee B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge C$ |
| (A5) $A \Rightarrow A \vee B$ | (A15) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ |
| (A6) $A \Rightarrow B \vee A$ | (A16) $A \wedge \neg A \Rightarrow B$ |
| (A7) $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$ | (A17) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ |
| (A8) $A \wedge B \Rightarrow A$ | (A18) $(A \wedge C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow (A \Rightarrow B))$ |
| (A9) $A \wedge B \Rightarrow B$ | (A19) $(A \Rightarrow (A \wedge \neg A)) \Rightarrow \neg A$ |
| (A10) $(C \Rightarrow A) \Rightarrow ((C \Rightarrow B) \Rightarrow (C \Rightarrow A \wedge B))$ | $\vdots$ |

● Nur eine Inferenzregel

$$(\text{mp}) \quad \frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

● Beweise mathematisch elegant aber unnatürlich

- (1) $A \wedge B \Rightarrow A$ (A8)
- (2) $A \wedge B \Rightarrow B$ (A9)
- (3) $(A \wedge B \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow B \wedge A))$ (A10)
- (4) $(A \wedge B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow B \wedge A)$ (mp mit (2), (3))
- (5) $(A \wedge B \Rightarrow B \wedge A)$ (mp mit (1), (4))

- **Lesbare, kompaktifizierte Beweisdarstellung**

- Beweisbaum mit Formeln und schematischen Inferenzregeln als Übergänge
- Globale Verwaltung temporärer Annahmen
- Synthetischer Aufbau (ungünstig für Suche nach Beweisen)

NATÜRLICHE DEDUKTION $\mathcal{NK}$

- **Lesbare, kompaktifizierte Beweisdarstellung**
 - Beweisbaum mit Formeln und **schematischen Inferenzregeln** als Übergänge
 - Globale Verwaltung temporärer Annahmen
 - **Synthetischer Aufbau** (ungünstig für Suche nach Beweisen)
- **Inferenzfiguren gruppiert nach logischen Symbolen**
 - **Einführungsregel**: Welche Voraussetzungen machen eine Formel gültig?
 - **Eliminationsregel**: Was folgt aus einer gegebenen Formel?

$\wedge -I$	$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$	$\wedge -E$	$\frac{A \wedge B}{A}$	$\frac{A \wedge B}{B}$
$\vee -I$	$\frac{A}{A \vee B}$	$\frac{B}{A \vee B}$	$\vee -E$	$\frac{A \vee B \quad \begin{array}{c} [A] \\ C \end{array} \quad \begin{array}{c} [B] \\ C \end{array}}{C}$
$\Rightarrow -I$	$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ B \end{array}}{A \Rightarrow B}$	$\Rightarrow -E$	$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$	
$\neg -I$	$\frac{\begin{array}{c} [A] \\ \text{ff} \end{array}}{\neg A}$	$\neg -E$	$\frac{\neg A \quad A}{\text{ff}}$	
<i>axiom</i>	$\overline{A \vee \neg A}$	$\text{ff} -E$	$\frac{\text{ff}}{A}$	

NATÜRLICHE DEDUKTION $\mathcal{NK}$

● Lesbare, kompaktifizierte Beweisdarstellung

- Beweisbaum mit Formeln und schematischen Inferenzregeln als Übergänge
- Globale Verwaltung temporärer Annahmen
- Synthetischer Aufbau (ungünstig für Suche nach Beweisen)

● Inferenzfiguren gruppiert nach logischen Symbolen

- Einführungsregel: Welche Voraussetzungen machen eine Formel gültig?
- Eliminationsregel: Was folgt aus einer gegebenen Formel?

$\wedge -I$	$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$	$\wedge -E$	$\frac{A \wedge B}{A}$	$\frac{A \wedge B}{B}$
$\vee -I$	$\frac{A}{A \vee B}$	$\frac{B}{A \vee B}$	$\vee -E$	$\frac{A \vee B \quad \begin{matrix} [A] \\ C \end{matrix} \quad \begin{matrix} [B] \\ C \end{matrix}}{C}$
$\Rightarrow -I$	$\frac{\begin{matrix} [A] \\ B \end{matrix}}{A \Rightarrow B}$	$\Rightarrow -E$	$\frac{A \quad A \Rightarrow B}{B}$	
$\neg -I$	$\frac{\begin{matrix} [A] \\ \text{ff} \end{matrix}}{\neg A}$	$\neg -E$	$\frac{\neg A \quad A}{\text{ff}}$	
<i>axiom</i>	$\overline{A \vee \neg A}$	$\text{ff} -E$	$\frac{\text{ff}}{A}$	

- Einziges Axiom $A \vee \neg A$ nur für klassische Logik erforderlich

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

MATHEMATISCHER BEWEIS

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
MATHEMATISCHER BEWEIS

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

MATHEMATISCHER BEWEIS

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

MATHEMATISCHER BEWEIS

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$
4. und mit der zweiten dann auch B .

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

MATHEMATISCHER BEWEIS

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$
4. und mit der zweiten dann auch B .
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ MATHEMATISCHER BEWEIS

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$
4. und mit der zweiten dann auch B .
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C .

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ MATHEMATISCHER BEWEIS

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$
4. und mit der zweiten dann auch B .
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C .
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ MATHEMATISCHER BEWEIS

1. Wir nehmen an $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ sei erfüllt
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$
4. und mit der zweiten dann auch B .
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C .
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$
8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.
Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
BEWEIS IN $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ Annahme
2. Wir nehmen weiter an, daß A gilt.
3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$
4. und mit der zweiten dann auch B .
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C .
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$.
8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.
Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
BEWEIS IN $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ Annahme

2. A Annahme

3. Aus der ersten Annahme folgt $(A \Rightarrow B)$

4. und mit der zweiten dann auch B .

5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt

6. und mit der vierten dann auch C .

7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$.

8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.

Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
BEWEIS IN $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ Annahme
2. A Annahme
3. $(A \Rightarrow B)$ $\wedge$ -E mit (1)
4. und mit der zweiten dann auch B .
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C .
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$.
8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.
Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
BEWEIS IN $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ Annahme
2. A Annahme
3. $(A \Rightarrow B)$ $\wedge$ -E mit (1)
4. B $\Rightarrow$ -E mit (2) und (3)
5. Aus der ersten Annahme folgt auch, daß $(B \Rightarrow C)$ gilt
6. und mit der vierten dann auch C .
7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$.
8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.
Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
BEWEIS IN $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ Annahme

2. A Annahme

3. $(A \Rightarrow B)$ $\wedge$ -E mit (1)

4. B $\Rightarrow$ -E mit (2) und (3)

5. $(B \Rightarrow C)$ $\wedge$ -E mit (1)

6. und mit der vierten dann auch C .

7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$.

8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.

Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
BEWEIS IN $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ Annahme

2. A Annahme

3. $(A \Rightarrow B)$ $\wedge$ -E mit (1)

4. B $\Rightarrow$ -E mit (2) und (3)

5. $(B \Rightarrow C)$ $\wedge$ -E mit (1)

6. C $\Rightarrow$ -E mit (4) und (5)

7. Es ergibt sich, daß C unter der Annahme A gilt. Also folgt $A \Rightarrow C$.

8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.

Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
BEWEIS IN $\mathcal{NK}$

1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ Annahme
2. A Annahme
3. $(A \Rightarrow B)$ $\wedge$ -E mit (1)
4. B $\Rightarrow$ -E mit (2) und (3)
5. $(B \Rightarrow C)$ $\wedge$ -E mit (1)
6. C $\Rightarrow$ -E mit (4) und (5)
7. $(A \Rightarrow C)$ $\Rightarrow$ -I mit (2) und (6) — (2) entfällt
8. Insgesamt folgt $A \Rightarrow C$ unter der Annahme $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$.
Damit gilt die Behauptung: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$
BEWEIS IN $\mathcal{NK}$

- | | |
|---|---|
| 1. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ | Annahme |
| 2. A | Annahme |
| 3. $(A \Rightarrow B)$ | $\wedge$ -E mit (1) |
| 4. B | $\Rightarrow$ -E mit (2) und (3) |
| 5. $(B \Rightarrow C)$ | $\wedge$ -E mit (1) |
| 6. C | $\Rightarrow$ -E mit (4) und (5) |
| 7. $(A \Rightarrow C)$ | $\Rightarrow$ -I mit (2) und (6) — (2) entfällt |
| 8. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ | $\Rightarrow$ -I mit (1) und (7) — (1) entfällt |

BEISPIEL: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

BEWEIS IN $\mathcal{NK}$

- | | | |
|----|--|---|
| 1. | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$ | Annahme |
| 2. | A | Annahme |
| 3. | $(A \Rightarrow B)$ | $\wedge$ -E mit (1) |
| 4. | B | $\Rightarrow$ -E mit (2) und (3) |
| 5. | $(B \Rightarrow C)$ | $\wedge$ -E mit (1) |
| 6. | C | $\Rightarrow$ -E mit (4) und (5) |
| 7. | $(A \Rightarrow C)$ | $\Rightarrow$ -I mit (2) und (6) — (2) entfällt |
| 8. | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ | $\Rightarrow$ -I mit (1) und (7) — (1) entfällt |

Schematischer Beweis in Baumstruktur

$$\begin{array}{c}
 \frac{[A] \quad \frac{[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \quad \wedge\text{-}E}{(A \Rightarrow B)} \quad \Rightarrow\text{-}E \quad \frac{[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)] \quad \wedge\text{-}E}{(B \Rightarrow C)} \quad \Rightarrow\text{-}E}{\frac{B \quad (B \Rightarrow C)}{C} \quad \Rightarrow\text{-}E} \quad \Rightarrow\text{-}I \\
 \frac{C}{(A \Rightarrow C)} \quad \Rightarrow\text{-}I \\
 \frac{(A \Rightarrow C)}{((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)} \quad \Rightarrow\text{-}I
 \end{array}$$

- **Modifikation von Natürlicher Deduktion**

- Schließen über Aussagen mit Annahmen (Mengen von Formeln)

SEQUENZENKALKÜLE

- **Modifikation von Natürlicher Deduktion**

- Schließen über Aussagen mit Annahmen (Mengen von Formeln)

- **Grundkonzept Sequenz:** $\underbrace{A_1, \dots, A_n}_{\text{Antezedent } \Gamma} \vdash \underbrace{B_1, \dots, B_m}_{\text{Sukzedent } \Phi}$

- Lesart “*Eine der Formeln B_i folgt aus den Annahmen $A_1, \dots, A_n$* ”
- **Zielsequenz** $\vdash C$ (“*Formel C gilt ohne weitere Annahmen*”)

SEQUENZENKALKÜLE

- **Modifikation von Natürlicher Deduktion**

- Schließen über Aussagen mit Annahmen (Mengen von Formeln)

- **Grundkonzept Sequenz:** $\underbrace{A_1, \dots, A_n}_{\text{Antezedent } \Gamma} \vdash \underbrace{B_1, \dots, B_m}_{\text{Sukzedent } \Phi}$

- Lesart “*Eine der Formeln B_i folgt aus den Annahmen $A_1, \dots, A_n$* ”
- **Zielsequenz** $\vdash C$ (“*Formel C gilt ohne weitere Annahmen*”)

- **Semantik entspricht** $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$

- Homomorphe Fortsetzung von Interpretationen

$$\iota(A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls aus } \iota(A_1) = \text{wahr} \\ & \text{und } \dots \iota(A_n) = \text{wahr} \\ & \text{immer } \iota(B_1) = \text{wahr} \\ & \text{oder } \dots \iota(B_m) = \text{wahr folgt} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

SEQUENZENKALKÜLE

- **Modifikation von Natürlicher Deduktion**

- Schließen über Aussagen mit Annahmen (Mengen von Formeln)

- Grundkonzept **Sequenz**: $\underbrace{A_1, \dots, A_n}_{\text{Antezedent } \Gamma} \vdash \underbrace{B_1, \dots, B_m}_{\text{Sukzedent } \Phi}$

- Lesart “*Eine der Formeln B_i folgt aus den Annahmen $A_1, \dots, A_n$* ”
- **Zielsequenz** $\vdash C$ (“*Formel C gilt ohne weitere Annahmen*”)

- **Semantik entspricht** $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow B_1 \vee \dots \vee B_m$

- Homomorphe Fortsetzung von Interpretationen

$$\iota(A_1, \dots, A_n \vdash B_1, \dots, B_m) = \begin{cases} \text{wahr} & \text{falls aus } \iota(A_1) = \text{wahr} \\ & \text{und } \dots \iota(A_n) = \text{wahr} \\ & \text{immer } \iota(B_1) = \text{wahr} \\ & \text{oder } \dots \iota(B_m) = \text{wahr folgt} \\ \text{falsch} & \text{sonst} \end{cases}$$

- Begriffe **Modell, Gültigkeit, Erfüllbarkeit** analog

INFERENZ IN SEQUENZENKALKÜLEN

- **Synthetische Beweise** wie bei $\mathcal{NK}$
 - Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig

INFERENZ IN SEQUENZENKALKÜLEN

- **Synthetische Beweise** wie bei $\mathcal{NK}$
 - Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig
- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**
 - Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)

INFERENZ IN SEQUENZENKALKÜLEN

- **Synthetische Beweise** wie bei $\mathcal{NK}$
 - Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig
- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**
 - Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge -E \quad \text{wird zu} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi} \wedge -L$$

INFERENZ IN SEQUENZENKALKÜLEN

- **Synthetische Beweise** wie bei $\mathcal{NK}$
 - Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig
- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**
 - Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)
$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge -E \quad \text{wird zu} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi} \wedge -L$$
 - Einführungsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln rechts für Sukzedent ($-R$)

INFERENZ IN SEQUENZENKALKÜLEN

- **Synthetische Beweise** wie bei $\mathcal{NK}$

- Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig

- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**

- Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge -E \quad \text{wird zu} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi} \wedge -L$$

- Einführungsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln rechts für Sukzedent ($-R$)

$\neg -R$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, \neg A}$	$\neg -L$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Phi}$
$\wedge -R$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \wedge B}$	$\wedge -L$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi \quad \Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}$
$\vee -R$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B}$	$\vee -L$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi \quad \Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \vee B \vdash \Phi}$
$\Rightarrow -R$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \Rightarrow B}$	$\Rightarrow -L$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Delta, B \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta, A \Rightarrow B \vdash \Phi, \Psi}$
<i>axiom</i>	$\frac{}{A \vdash A}$	<i>Schnitt</i>	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad A, \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi, \Psi}$

INFERENZ IN SEQUENZENKALKÜLEN

- **Synthetische Beweise** wie bei $\mathcal{NK}$

- Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig

- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**

- Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge -E \quad \text{wird zu} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi} \wedge -L$$

- Einführungsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln rechts für Sukzedent ($-R$)

$\neg -R$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, \neg A}$	$\neg -L$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Phi}$
$\wedge -R$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \wedge B}$	$\wedge -L$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi \quad \Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}$
$\vee -R$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B}$	$\vee -L$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi \quad \Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \vee B \vdash \Phi}$
$\Rightarrow -R$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \Rightarrow B}$	$\Rightarrow -L$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Delta, B \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta, A \Rightarrow B \vdash \Phi, \Psi}$
<i>axiom</i>	$\overline{A \vdash A}$	<i>Schnitt</i>	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad A, \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi, \Psi}$

- Mehrere Sukzedentenformeln nur für klassische Logik erforderlich

INFERENZ IN SEQUENZENKALKÜLEN

- **Synthetische Beweise** wie bei $\mathcal{NK}$

- Lokale Sicht: keine globale Verwaltung von Annahmen nötig

- **Regeln manipulieren Sequenzen statt Formeln**

- Eliminationsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln links für Antezedent ($-L$)

$$\frac{A \wedge B}{A} \wedge -E \quad \text{wird zu} \quad \frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi} \wedge -L$$

- Einführungsregeln $\mapsto$ Einführungsregeln rechts für Sukzedent ($-R$)

$\neg -R$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi}{\Gamma \vdash \Phi, \neg A}$	$\neg -L$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Phi}$
$\wedge -R$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \wedge B}$	$\wedge -L$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi \quad \Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}$
$\vee -R$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A}{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B} \quad \frac{\Gamma \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \vee B}$	$\vee -L$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi \quad \Gamma, B \vdash \Phi}{\Gamma, A \vee B \vdash \Phi}$
$\Rightarrow -R$	$\frac{\Gamma, A \vdash \Phi, B}{\Gamma \vdash \Phi, A \Rightarrow B}$	$\Rightarrow -L$	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad \Delta, B \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta, A \Rightarrow B \vdash \Phi, \Psi}$
<i>axiom</i>	$\overline{A \vdash A}$	<i>Schnitt</i>	$\frac{\Gamma \vdash \Phi, A \quad A, \Delta \vdash \Psi}{\Gamma, \Delta \vdash \Phi, \Psi}$

- Mehrere Sukzedentenformeln nur für klassische Logik erforderlich

- Originalformulierung des Kalküls $\mathcal{LK}$ verwendet **Listen von Formeln**

Kalkül benutzt **strukturelle Regeln** zur Simulation von Formelmengen

SEQUENZENBEWEIS FÜR $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$

Axiom

SEQUENZENBEWEIS FÜR $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$

Axiom

2. $B \vdash B$

Axiom

SEQUENZENBEWEIS FÜR $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ Axiom

2. $B \vdash B$ Axiom

3. $A, A \Rightarrow B \vdash B$ $\Rightarrow$ -E mit (1), (2)

SEQUENZENBEWEIS FÜR $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ Axiom
2. $B \vdash B$ Axiom
3. $A, A \Rightarrow B \vdash B$ $\Rightarrow$ -E mit (1), (2)
4. $C \vdash C$ Axiom

SEQUENZENBEWEIS FÜR $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ Axiom
2. $B \vdash B$ Axiom
3. $A, A \Rightarrow B \vdash B$ $\Rightarrow$ -E mit (1), (2)
4. $C \vdash C$ Axiom
5. $A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C$ $\Rightarrow$ -E mit (3), (4)

SEQUENZENBEWEIS FÜR $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ Axiom

2. $B \vdash B$ Axiom

3. $A, A \Rightarrow B \vdash B$ $\Rightarrow$ -E mit (1), (2)

4. $C \vdash C$ Axiom

5. $A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C$ $\Rightarrow$ -E mit (3), (4)

6. $A, (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C$ $\wedge$ -E

SEQUENZENBEWEIS FÜR $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ Axiom

2. $B \vdash B$ Axiom

3. $A, A \Rightarrow B \vdash B$ $\Rightarrow$ -E mit (1), (2)

4. $C \vdash C$ Axiom

5. $A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C$ $\Rightarrow$ -E mit (3), (4)

6. $A, (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C$ $\wedge$ -E

7. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow C$ $\Rightarrow$ -I

SEQUENZENBEWEIS FÜR $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ Axiom

2. $B \vdash B$ Axiom

3. $A, A \Rightarrow B \vdash B$ $\Rightarrow$ -E mit (1), (2)

4. $C \vdash C$ Axiom

5. $A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C$ $\Rightarrow$ -E mit (3), (4)

6. $A, (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C$ $\wedge$ -E

7. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow C$ $\Rightarrow$ -I

8. $\vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ $\Rightarrow$ -I

SEQUENZENBEWEIS FÜR $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

1. $A \vdash A$ Axiom
2. $B \vdash B$ Axiom
3. $A, A \Rightarrow B \vdash B$ $\Rightarrow$ -E mit (1), (2)
4. $C \vdash C$ Axiom
5. $A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C$ $\Rightarrow$ -E mit (3), (4)
6. $A, (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C$ $\wedge$ -E
7. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow C$ $\Rightarrow$ -I
8. $\vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ $\Rightarrow$ -I

Schematischer Beweis in Baumstruktur

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \vdash A \quad B \vdash B}{A, A \Rightarrow B \vdash B} \Rightarrow -L \quad C \vdash C \\
 \hline
 \frac{A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C}{A, A \Rightarrow B, (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C} \wedge -L \\
 \hline
 \frac{A, A \Rightarrow B, (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C}{A, (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C} \wedge -L \text{ (mit Kontraktion)} \\
 \hline
 \frac{A, (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash C}{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow C} \Rightarrow -R \\
 \hline
 \frac{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow C}{\vdash ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow A \Rightarrow C} \Rightarrow -R
 \end{array}$$

KONSTRUKTIVE VS. KLASSISCHE BEWEISKALKÜLE

- $\mathcal{NK}$ und $\mathcal{LK}$ haben intuitionistische Varianten
 - $\mathcal{NJ}$: Kalkül verwendet nur konnektionsbezogene Inferenzregeln
Keine gesonderten Axiome erforderlich

KONSTRUKTIVE VS. KLASSISCHE BEWEISKALKÜLE

- $\mathcal{NK}$ und $\mathcal{LK}$ haben intuitionistische Varianten

- $\mathcal{NJ}$: Kalkül verwendet nur konnektionsbezogene Inferenzregeln

- Keine gesonderten Axiome erforderlich

- $\mathcal{LJ}$: Sukzedent enthält genau eine Formel (“single conclusioned”)

- Regeln dürfen nie zwei oder mehr Sukzedentenformeln erzeugen

KONSTRUKTIVE VS. KLASSISCHE BEWEISKALKÜLE

- $\mathcal{NK}$ und $\mathcal{LK}$ haben intuitionistische Varianten

- $\mathcal{NJ}$: Kalkül verwendet nur konnektionsbezogene Inferenzregeln

- Keine gesonderten Axiome erforderlich

- $\mathcal{LJ}$: Sukzedent enthält genau eine Formel (“single conclusioned”)

- Regeln dürfen nie zwei oder mehr Sukzedentenformeln erzeugen

- Die intuitionistische Form erscheint natürlicher

- Die Grundform der Kalküle liefert immer die konstruktive Logik

KONSTRUKTIVE VS. KLASSISCHE BEWEISKALKÜLE

- $\mathcal{NK}$ und $\mathcal{LK}$ haben intuitionistische Varianten

- $\mathcal{NJ}$: Kalkül verwendet nur konnektionsbezogene Inferenzregeln

Keine gesonderten Axiome erforderlich

- $\mathcal{LJ}$: Sukzedent enthält genau eine Formel (“single conclusioned”)

Regeln dürfen nie zwei oder mehr Sukzedentenformeln erzeugen

- Die intuitionistische Form erscheint natürlicher

- Die Grundform der Kalküle liefert immer die konstruktive Logik

- Nichtkonstruktive Schlüsse erfordern besondere Konstrukte

- $\mathcal{NK}$: gesondertes “künstliches” Axiom $A \vee \neg A$ wird hinzugefügt

- $\mathcal{LK}$: zu beweisende Schlußfolgerung steht nicht eindeutig fest

... man kann mitten im Beweis das Beweisziel wechseln

KONSTRUKTIVE VS. KLASSISCHE BEWEISKALKÜLE

- $\mathcal{NK}$ und $\mathcal{LK}$ haben intuitionistische Varianten

- $\mathcal{NJ}$: Kalkül verwendet nur konnektionsbezogene Inferenzregeln

Keine gesonderten Axiome erforderlich

- $\mathcal{LJ}$: Sukzedent enthält genau eine Formel (“single conclusioned”)

Regeln dürfen nie zwei oder mehr Sukzedentenformeln erzeugen

- Die intuitionistische Form erscheint natürlicher

- Die Grundform der Kalküle liefert immer die konstruktive Logik

- Nichtkonstruktive Schlüsse erfordern besondere Konstrukte

- $\mathcal{NK}$: gesondertes “künstliches” Axiom $A \vee \neg A$ wird hinzugefügt

- $\mathcal{LK}$: zu beweisende Schlußfolgerung steht nicht eindeutig fest

... man kann mitten im Beweis das Beweisziel wechseln

- Nichtkonstruktive Beweise sind allerdings zuweilen erheblich kürzer

SYNTHETISCHE VS. ANALYTISCHE BEWEISKALKÜLE

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**
 - Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
 - Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt

SYNTHETISCHE VS. ANALYTISCHE BEWEISKALKÜLE

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**

- Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
- Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt

- **Analytische Form unterstützt Beweissuche**

- Umkehrung der Inferenzregeln bzw. ihrer Lesart

$$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi} \quad \wedge L$$

SYNTHETISCHE VS. ANALYTISCHE BEWEISKALKÜLE

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**

- Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
- Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt

- **Analytische Form unterstützt Beweissuche**

- Umkehrung der Inferenzregeln bzw. ihrer Lesart
$$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi} \quad \wedge L$$
- Geeigneter zur **Entwicklung** von Beweisen
 - Suche hinreichende Voraussetzungen für Gültigkeit einer Aussage
 - Iterativer Prozess **verfeinert** Beweisziel in Teilziele, bis keine unbewiesenen Voraussetzungen übrigbleiben

SYNTHETISCHE VS. ANALYTISCHE BEWEISKALKÜLE

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**

- Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
- Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt

- **Analytische Form unterstützt Beweissuche**

- Umkehrung der Inferenzregeln bzw. ihrer Lesart $\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi} \quad \wedge L$
- Geeigneter zur **Entwicklung** von Beweisen
 - Suche hinreichende Voraussetzungen für Gültigkeit einer Aussage
 - Iterativer Prozess **verfeinert** Beweisziel in Teilziele, bis keine unbewiesenen Voraussetzungen übrigbleiben
 - **Sequenzen enthalten alle beweisrelevanten Informationen** für eine lokale Durchführung dieses Prozesses,

SYNTHETISCHE VS. ANALYTISCHE BEWEISKALKÜLE

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**

- Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
- Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt

- **Analytische Form unterstützt Beweissuche**

- Umkehrung der Inferenzregeln bzw. ihrer Lesart
$$\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi} \quad \wedge L$$
- Geeigneter zur **Entwicklung** von Beweisen
 - Suche hinreichende Voraussetzungen für Gültigkeit einer Aussage
 - Iterativer Prozess **verfeinert** Beweisziel in Teilziele, bis keine unbewiesenen Voraussetzungen übrigbleiben
 - **Sequenzen enthalten alle beweisrelevanten Informationen** für eine lokale Durchführung dieses Prozesses,
- Synthetischer Beweis ist Umkehrung des fertigen Beweisbaums

SYNTHETISCHE VS. ANALYTISCHE BEWEISKALKÜLE

- **Synthetische Form unterstützt Beweispräsentation**

- Beweis führt von Annahmen zum Endergebnis
- Offen bleibt, wie man zu den anfänglichen Annahmen kommt

- **Analytische Form unterstützt Beweissuche**

- Umkehrung der Inferenzregeln bzw. ihrer Lesart $\frac{\Gamma, A \wedge B \vdash \Phi}{\Gamma, A, B \vdash \Phi} \quad \wedge L$
- Geeigneter zur **Entwicklung** von Beweisen
 - Suche hinreichende Voraussetzungen für Gültigkeit einer Aussage
 - Iterativer Prozess **verfeinert** Beweisziel in Teilziele, bis keine unbewiesenen Voraussetzungen übrigbleiben
 - **Sequenzen enthalten alle beweisrelevanten Informationen** für eine lokale Durchführung dieses Prozesses,
- Synthetischer Beweis ist Umkehrung des fertigen Beweisbaums

→ **Refinement Logic:** (Konstruktiver) analytischer Sequenzenkalkül

- Besonders geeignet für **computergestützte interaktive Beweisführung**