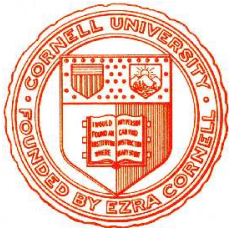
Automatisierte Logik und Programmierung

Einheit 10



Fortgeschrittene Konzepte der CTT

1. Teilmengen- und Quotiententypen
2. Rekursive Datentypen
3. Durchschnitt, Vereinigung, starke Abhängigkeit

Teilmengenkonstrukt $\{x:S \mid P[x]\}$

- **Steigerung der praktischen Ausdruckskraft**
  - Mengentheories Standardkonzept mit klarer intuitiver Bedeutung
  - Liefert natürliche Repräsentation von Untertypen ($\mathbb{N}$, T `List`$^+$, ...)
- **Konstruktive Interpretation schwierig**
  - Elemente sind die Elemente aus S, welche die Eigenschaft P besitzen
  - Beweisterm für Eigenschaft P darf kein Bestandteil des Elements sein
- **Formale Ähnlichkeit zu $x:S\times P[x]$**
  - Elemente sind Paare $\langle s, pf\rangle$ mit $s \in \{x:S \mid P[x]\}$
  - Beweiskomponente $pf \in P[s]$ bleibt Bestandteil des Elements
  - Entfernung des Beweisterms aus generierten Algorithmen mühsam
  - Evidenz für $P[s]$ ist bei Teilmengen nur implizit vorhanden
  - $x:S\times P[x]$ ist ungeeignet als Beschreibung von Teilmengen

Teilmengentyp muß explizit repräsentiert werden

Teilmengen, formal

Syntax:

Kanonisch: $\{x:S \mid T[x]\}$ **set**{}(S; x . $T[x]$)

$\{S \mid T\}$ **set**{}(S; . T)

Nichtkanonisch: —

Auswertung: —

Semantik:

Verletzt Prinzip der getrennten Definition von Typen

$\{x_1:S_1 \mid T_1\} = \{x_2:S_2 \mid T_2\} \equiv$ $S_1{=}S_2$ und es gibt Terme p_1, p_2 und eine Variable x, die weder in T_1 noch in T_2 vorkommt, so daß

$p_1 \in \forall x:S_1 \,.\, T_1[x/x_1] \Rightarrow T_2[x/x_2]$

und $p_2 \in \forall x:S_1 \,.\, T_2[x/x_2] \Rightarrow T_1[x/x_1]$

$T = \{S_2 \mid T_2\} \equiv T = \{x_2:S_2 \mid T_2\}$ für ein beliebiges $x_2 \in \mathcal{V}$

$\{S_1 \mid T_1\} = T \equiv \{x_1:S_1 \mid T_1\}{=}T$ für ein beliebiges $x_1 \in \mathcal{V}$

$s = t \in \{x:S \mid T\} \equiv \{x:S \mid T\}$ Typ und $s = t \in S$ und es gibt einen Term p mit der Eigenschaft $p \in T[s/x]$

Details im Appendix A.3.12 des Nuprl Manuals

Teilmengen: Einfluss auf das Inferenzsystem

- **Verwaltung von implizitem Wissen erforderlich**
  - $\{x{:}T \mid P\}$ hat mehr Information als T und weniger als $x{:}T{\times}P$
    - Nullstellenbestimmung ist verschieden aufwendig für Elemente von $\mathbb{Z}{\to}\mathbb{Z}$, $\texttt{f}{:}\mathbb{Z}{\to}\mathbb{Z} \times (\exists \texttt{y}{:}\mathbb{Z}.\ \texttt{f(y)} = \texttt{0})$ und $\{\texttt{f}{:}\mathbb{Z}{\to}\mathbb{Z} \mid \exists \texttt{y}{:}\mathbb{Z}.\ \texttt{f(y)}{=}\texttt{0}\}$
  - Für $s \in \{x{:}T \mid P\}$ wissen wir, daß $P[s]$ gilt, aber wir wissen nicht, wie ein Beweisterm für $P[s]$ konkret aussieht
  - Das Wissen $P[s]$ muß in Beweisen verwendbar sein, aber die Evidenz für $P[s]$ kann nicht algorithmisch verwendet werden
  - Ein Beweisterm für $P[s]$ darf nicht im Extraktterm vorkommen
- **Unterstütze versteckte Hypothesen**
  - Erzeugung durch Dekomposition der Annahme $z{:}\{x{:}S \mid T\}$

    $\Gamma, z{:}\{x{:}S \mid T\}, \Delta \vdash C \ \lfloor \mathsf{ext}\ (\lambda y.\, t)\ z \rfloor$

    `BY setElimination` i y v

    $\Gamma, z{:}\{x{:}S \mid T\}, y{:}S, [\![v]\!]{:}T[y/x], \Delta[y/z] \vdash C[y/z] \ \lfloor \mathsf{ext}\ t \rfloor$
  - Freigabe in Teilzielen mit Extraktterm Ax (Gleichheiten, Kleiner-Relation)

Wichtige benutzerdefinierte Mengentypen

- **Zahlenmengen und -intervalle:** Theory `int_1`

$\mathbb{N}$	$\equiv \{\mathtt{i}{:}\mathbb{Z} \mid 0 \leq \mathtt{i}\}$	**nat**
$\mathbb{N}^+$	$\equiv \{\mathtt{i}{:}\mathbb{Z} \mid 0 < \mathtt{i}\}$	**nat_plus**
$\{i\ldots\}$	$\equiv \{\mathtt{j}{:}\mathbb{Z} \mid i \leq \mathtt{j}\}$	**int_upper**
$\{\ldots i\}$	$\equiv \{\mathtt{j}{:}\mathbb{Z} \mid \mathtt{j} \leq i\}$	**int_lower**
$\{i..j\}$	$\equiv \{\mathtt{k}{:}\mathbb{Z} \mid i \leq \mathtt{k} \leq j\}$	**int_iseg**
$\{i..j^-\}$	$\equiv \{\mathtt{k}{:}\mathbb{Z} \mid i \leq \mathtt{k} < j\}$	**int_seg**

- **Listen**

T `list`$^+$	$\equiv \{\mathtt{l}{:}T\ \mathtt{list} \mid 0 < \mathtt{||l||}\}$	**listp**

Quotiententypen

- **Modifikation der Gleichheit auf Typen**
  - Rationale Zahlen: Paare ganzer Zahlen mit $\langle z_1 , n_1 \rangle = \langle z_2 , n_2 \rangle$, falls $z_1 * n_2 = z_2 * n_1$
  - Reelle Zahlen: konvergierende rationale Folgen mit gleichem Grenzwert
  - Restklassenräume: $\mathbb{Z}$ `mod` k
- **Faktorisierung modulo einer Äquivalenz**
  - Elemente s,t werden aus Typ T ausgewählt
  - Gleichheit von s und t wird über Äquivalenzrelation E neu definiert
  - Benutzerdefinierte Gleichheit wird in das Typsystem eingebettet
  - Substitutions- und Gleichheitsregeln werden direkt anwendbar

Quotiententypen wichtig für formale Mathematik

Quotiententypen, formal

Syntax:

Kanonisch: $x, y : T//E$ **quotient**{}(T; x, y . E)

Nichtkanonisch: —

Auswertung: —

Semantik:

$x_1, y_1 : T_1//E_1$
$= x_2, y_2 : T_2//E_2$ $\equiv$ $T_1 = T_2$ und es gibt (verschiedene) Variablen x, y, z, die weder in E_1 noch in E_2 vorkommen, und Terme p_1, p_2, r,s und t mit der Eigenschaft

$$p_1 \in \forall x:T_1 . \forall y:T_1 . E_1[x, y/x_1, y_1] \Rightarrow E_2[x, y/x_2, y_2]$$
und $p_2 \in \forall x:T_1 . \forall y:T_1 . E_2[x, y/x_2, y_2] \Rightarrow E_1[x, y/x_1, y_1]$
und $r \in \forall x:T_1 . E_1[x, x/x_1, y_1]$
und $s \in \forall x:T_1 . \forall y:T_1 . E_1[x, y/x_1, y_1] \Rightarrow E_1[y, x/x_1, y_1]$
und $t \in \forall x:T_1 . \forall y:T_1 . \forall z:T_1 .$
$$E_1[x, y/x_1, y_1] \Rightarrow E_1[y, z/x_1, y_1] \Rightarrow E_1[x, z/x_1, y_1]$$

$s = t \in x, y : T//E$ $\equiv$ $x, y : T//E$ Typ und $s \in T$ und $t \in T$ und es gibt einen Term p mit der Eigenschaft $p \in E[s, t/x, y]$

Inferenzregeln und Taktiken im Appendix A.3.14 des Nuprl Manuals

Wichtige benutzerdefinierte Quotiententypen

- **Rationale Zahlen**

$x_1 =_q x_2$	$\equiv$ let $\langle z_1, n_1\rangle = x_1$ in let $\langle z_2, n_2\rangle = x_2$ in $z_1 * n_2 = z_2 * n_1$	**rat_equal**
$\mathbb{Q}$	$\equiv$ $\mathtt{x,y} : \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^+ /\!/_{\mathtt{x}=_q\mathtt{y}}$	**rat**
$x_1 + x_2$	$\equiv$ let $\langle z_1, n_1\rangle = x_1$ in let $\langle z_2, n_2\rangle = x_2$ in $\langle z_1 * n_2 + z_2 * n_1, n_1 * n_2\rangle$	**rat_add**
$x_1 - x_2$	$\equiv$ let $\langle z_1, n_1\rangle = x_1$ in let $\langle z_2, n_2\rangle = x_2$ in $\langle z_1 * n_2 - z_2 * n_1, n_1 * n_2\rangle$	**rat_sub**
$x_1 * x_2$	$\equiv$ let $\langle z_1, n_1\rangle = x_1$ in let $\langle z_2, n_2\rangle = x_2$ in $\langle z_1 * z_2, n_1 * n_2\rangle$	**rat_mul**
$x_1 <_q x_2$	$\equiv$ let $\langle z_1, n_1\rangle = x_1$ in let $\langle z_2, n_2\rangle = x_2$ in $z_1 * n_2 < z_2 * n_1$	**rat_lt**

- **Restklassenräume**

$x_1 = x_2 \mod k$	$\equiv$ k divides $x_1 - x_2$	**eqmod**
$\mathbb{Z} \mod k$	$\equiv$ $\mathtt{x,y} : \mathbb{Z} /\!/_{\mathtt{x}=\mathtt{y} \bmod k}$	**int_mod**

Quotiententypen: Einfluss auf das Inferenzsystem

- **Gleichheit $E[s,t\,/\,x,y]$ ist implizites Wissen**
  - Wir wissen $E[s,t/x,y]$ wenn $s = t \in x,y : T//E$
  - Beweisterm für $E[s,t/x,y]$ darf nicht algorithmisch verwendet werden
  - Dekomposition obiger Gleichheit muß versteckte Hypothesen erzeugen

$$\Gamma,\, v{:}\, s = t \in x,y : T//E\,,\, \Delta \vdash C \;\lfloor \mathsf{ext}\ u \rfloor$$

```
BY quotient_equalityElimination i j v'
```

$$\Gamma,\, v{:}\, s = t \in x,y : T//E\,,\, [\![v']\!]{:}E[s,t/x,y],\, \Delta \vdash C \;\lfloor \mathsf{ext}\ u \rfloor$$
$$\Gamma,\, v{:}\, s = t \in x,y : T//E\,,\, \Delta \vdash E[s,t/x,y] \in \mathbb{U}_j \;\lfloor \mathsf{Ax} \rfloor$$

  - Freigabe versteckter Hypothesen wie zuvor

Type-Squashing

- **Überstrukturierung auf $x, y : T//E$ möglich**
  - $x_1 <_q x_2$ muß wohlgeformt sein
  - Gilt $x_1 <_q x_2 = x_1' <_q x_2'$, wenn $x_1 = x_1' \in \mathbb{Q}$ und $x_2 = x_2' \in \mathbb{Q}$?
    - $z_1 * n_2 < z_2 * n_1 = z_1' * n_2' < z_2' * n_1'$ verlangt $z_1 * n_2 = z_1' * n_2' \in \mathbb{Z}$ und $z_2 * n_1 = z_2' * n_1' \in \mathbb{Z}$
    - Nicht gültig für $x_1 = \langle 2, 1 \rangle$, $x_1' = \langle 4, 2 \rangle$, $x_2 = x_2' = \langle 3, 1 \rangle$
  - Definition von $<_q$ enthält zu viel Struktur, wo nur "Wahrheit" nötig ist
  - Unabhängigkeit vom Repräsentanten nicht mehr gegeben
- **Type-Squashing für benutzerdefinierte Prädikate**
  - $\downarrow P \equiv \{ 0 \in \mathbb{Z} \mid P \}$
  - Reduziert Struktur des Prädikats (Typs) P auf "Wahrheitstyp"
  - Entfernt Überstrukturierung aus Definition von Prädikaten

Definition Reeller Zahlen mit Quotiententypen

$x_1 <_q x_2$	$\equiv$	$\downarrow$let $\langle z_1, n_1\rangle = x_1$ in let $\langle z_2, n_2\rangle = x_2$ in $z_1 * n_2 < z_2 * n_1$	**rat_lt**
$x_1 \leq_q x_2$	$\equiv$	$x_1 < x_2 \ \vee \ x_1 = x_2 \in \mathbb{Q}$	**rat_le**
z/n	$\equiv$	$\langle z, n\rangle$	**rat_frac**
$\lvert x \rvert$	$\equiv$	let $\langle z, n\rangle = x$ in if $z<0$ then $\langle -z, n\rangle$ else $\langle z, n\rangle$	**rat_abs**
$\mathbb{R}_{pre}$	$\equiv$	$\{\mathtt{f}:\mathbb{N}^+\to\mathbb{Q} \mid \forall \mathtt{m},\mathtt{n}:\mathbb{N}^+.\ \lvert \mathtt{f(n)} - \mathtt{f(m)}\rvert \leq \mathtt{1/m+1/n}\}$	**real_pre**
$x_1 =_r x_2$	$\equiv$	$\forall \mathtt{n}:\mathbb{N}^+.\ \lvert x_1(\mathtt{n}) - x_2(\mathtt{n})\rvert \leq \mathtt{2/n}$	**real_equal**
$\mathbb{R}$	$\equiv$	$\mathtt{x},\mathtt{y} : \mathbb{R}_{pre}//\mathtt{x}=_r\mathtt{y}$	**real**
$x_1 + x_2$	$\equiv$	$\lambda \mathtt{n}.\ x_1(\mathtt{n}) + x_2(\mathtt{n})$	**real_add**
$x_1 - x_2$	$\equiv$	$\lambda \mathtt{n}.\ x_1(\mathtt{n}) - x_2(\mathtt{n})$	**real_sub**
$\lvert x \rvert$	$\equiv$	$\lambda \mathtt{n}.\ \lvert x(\mathtt{n})\rvert$	**real_abs**

Elegante Beweise erfordern viele Spezialtaktiken

Rekursive Definition

- **Größere Freiheit in der Formulierung**
  - Zahlen unterstützen induktive Beweise und primitive Rekursion
  - Unnatürliche Simulation rekursiver Datentypen (Bäume, Graphen,..)
  - Y-Kombinator unterstützt freie,schwer zu kontrollierende Rekursion

  $\mapsto$ Direkte Einbettung rekursiver Definition für bekannte Konstrukte
- **Induktive Typkonstruktoren**
  - Wohlfundierte, rekursiv definierte Datentypen und ihre Elemente
- **Partiell Rekursive Funktionen**
  - Totale rekursive Funktionen auf eingeschränktem Definitionsbereich
  - (Fast exakter) Definitionsbereich aus Algorithmus ableitbar
- **Lässige Typkonstruktoren**
  - Schließen über unendliche Objekte

Repräsentation rekursiv definierter Strukturen

- **Rekursive Typdefinition mit Gleichung $X = T[X]$**
  - z.B. `rectype bintree` = $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \times$ `bintree` $\times$ `bintree`
  - Kanonische Elemente definiert durch Aufrollen der Gleichung
  - Verarbeitung durch induktiven Operator $\mathsf{let}^*\ f(x) = t\ \mathsf{in}\ f(e)$
    liefert terminierende freie rekursive Funktionsdefinitionen

```
let* sum(b-tree) =
    case b-tree of inl(leaf) ↦ leaf
                 | inr(triple) ↦ let ⟨num,pair⟩ = triple
                                 in let ⟨left,right⟩ = pair
                                    in num+sum(left)+sum(right)
in sum(t)
```

- **Parametrisierte simultane Rekursion möglich**
  - rectype $X_1(x_1)$ = T_{X_1} and ... and $X_n(x_n)$ = T_{X_n} select $X_i(a_i)$
  - Allgemeinste Form einer rekursiven Typdefinition

Induktive Typen, formal

Syntax:

Kanonisch:	$\mathsf{rectype}\ X = T_X$	$\mathbf{rec}\{\}(X\,.\,T_X)$
Nichtkanonisch:	$\mathsf{let}^*\ f(x) = t\ \ \mathsf{in}\ \ f(e)$	$\mathbf{rec\_ind}\{\}(e;\, f, x\,.\,t)$

Auswertung:

$$\mathsf{let}^*\ f(x) = t\ \ \mathsf{in}\ \ f(e) \quad \xrightarrow{\beta} \quad t[\lambda y.\mathsf{let}^*\ f(x) = t\ \ \mathsf{in}\ \ f(y),\ e\ /\ f, x]$$

Terminierung von $\mathsf{let}^*\ f(x) = t\ \ \mathsf{in}\ \ f(e)$ *verlangt* $e \in \mathsf{rectype}\ X = T[X]$

Semantik:

$\mathsf{rectype}\ X_1 = T_{X1}$

$= \mathsf{rectype}\ X_2 = T_{X2} \quad \equiv \quad T_{X1}[X/X_1] = T_{X2}[X/X_2]$ für alle Typen X

$s = t \in \mathsf{rectype}\ X = T_X \quad \equiv \quad \mathsf{rectype}\ X = T_X$ Typ

und $\ s = t \in T_X[\mathsf{rectype}\ X = T_X\ /\ X]$

Inferenzregeln und Taktiken im Appendix A.3.11 des Nuprl Manuals

Rahmenbedingungen für rectype $X = T_X$

Induktive Definitionen müssen wohlfundiert sein

- **Semantik ist kleinster Fixpunkt von $T[X]$**
  - Existenz des Fixpunkts muß gesichert sein
    - $T[X]$ muß Basisfall für Induktionsanfang enthalten
    - Rekursiver Aufruf von X muß "natürliche" Elemente ermöglichen
  - Typen wie rectype $\mathtt{X} = \mathtt{X} \to \mathbb{Z}$ müssen ausgeschlossen werden
    - rectype $\mathtt{X} = \mathtt{X} \to \mathbb{Z}$ hat $\lambda \mathtt{x.\ x\ x}$ als kanonisches Element
    - $\lambda \mathtt{x.\ x\ x}$ wäre sogar Extrakt-Term von $\vdash$ rectype $\mathtt{X} = \mathtt{X} \to \mathbb{Z}$
- **Syntaktische Einschränkungen erforderlich**
  - Allgemeine Wohlfundiertheit rekursiver Typen ist unentscheidbar
    - Entspricht dem Halteproblem rekursiver Programme
  - Kriterium: $T[X]$ darf X nur positiv enthalten
    - Innerhalb von Funktionenräumen darf X nur "rechts" vorkommen

Rekursive Funktionen

- **Definition von Funktionen durch $f(x) = t[f, x]$**
  - z.B. λf . let* $\mathtt{min}_f$(y) = if f(y)=0 then y else $\mathtt{min}_f$ (y+1) in $\mathtt{min}_f$(0)
    λx . let* sqr(y) = if x<$(y+1)^2$ then y else sqr (y+1) in sqr(0)
  - Semantik: Kleinster Fixpunkt von $t[f, x]$
- **Analog zu let* $f(x) = t$ in $f(e)$ aber**
  - Keine Koppelung an bekannte rekursiver Struktur erforderlich
  - Kein Extraktterm einer Eliminationsregel
  - Flexiblerer Einsatz in Programmierung ("reale" Programme)
  - Benötigt Bestimmung der induktiven Struktur des Definitionsbereichs
- **Explizite Verankerung in CTT bis Nuprl-3**
  - Datentyp der partiell-rekursiven Funktionen
  - Automatische Bestimmung einer Approximation des Definitionsbereichs
  - Logisch komplex und beschränkt auf Funktionen erster Stufe
- **Heute ersetzt durch Y-Kombinator**
  - Formale Notation letrec $f(x) = t$ ist Abkürzung für $\mathbf{Y}(\lambda f.\lambda x.t)$
  - Terminierungsbeweis durch Benutzer erforderlich

Lässige Typen

- **Repräsentation unendlicher Datenstrukturen**
  - Rekursive Definition durch die Gleichung $X = T[X]$

    z.B. $\texttt{inftree} = \mathbb{Z} \times \texttt{inftree} \times \texttt{inftree}$

    $\texttt{stream} = \mathsf{Atom} \times \texttt{stream}$
- **Formal ähnlich zum induktiven Datentyp**
  - Kanonische Elemente definiert durch Aufrollen der Gleichung
  - Andere Semantik für $\mathsf{inftype}\ X = T_X$: größter Fixpunkt von $T[X]$,
  - Kein Basisfall für Induktionsanfang erforderlich
  - Verarbeitung durch induktiven Operator $\mathsf{let}^\infty\ f(x) = t\ \mathsf{in}\ f(e)$
- **Parametrisierte simultane Rekursion möglich**

Kein fester Bestandteil der CTT

Neuere Typkonstrukte der CTT (I)

- **Durchschnitt $\cap x : S \,.\, T[x]$** Appendix A.3.13 des Nuprl Manuals
  - Verallgemeinerung des einfachen Durchschnitts $S \cap T$
    - Durchschnitt einer Familie von Datentypen
    - Elemente müssen für alle $x \in S$ zum Typ $T[x]$ gehören
  - Strukturell ähnlich zu $x{:}S \rightarrow T[x]$ (aber andere Semantik)
  - Gut für Formalisierung von Record-Strukturen in Programmiersprachen
  - Ermöglicht Definition eines Typs aller Terme
    - $\mathtt{Top} \equiv \cap \mathtt{x} : \mathtt{Void} \,.\, \mathtt{Void}$
  - Ermöglicht Definition von guarded types $\cap x : S \,.\, T$ (T nicht abhängig von x)
    - Codiert Aussage: "T ist ein Typ, wenn S Elemente hat"
    - Nützlich für Wohlgeformtheitsbeweise zu mengentheoretischen Aussagen
- **Abhängiger Durchschnitt $x : S \cap T[x]$** Bisher nur in MetaPRL
  - Element s muß zu S und gleichzeitig zu $T[s]$ gehören (Selbstreferenz!)
  - Gut für Formalisierung von Abstrakten Datentypen, Record-Strukturen mit internen Abhängigkeiten, Objekten

Neuere Typkonstrukte der CTT (II)

- **Vereinigung $\cup x:S.T[x]$** Bisher nur in MetaPRL
  - Vereinigung einer Familie von Datentypen
  - Elemente müssen zu einem $T[x]$ mit $x \in S$ gehören
  - Elementgleichheit schwierig bei Überlappungen der Typen
- **Squiggle-Equality $s \sim t$**
  - Einfacherer, syntaktischer Gleichheitstyp, ohne Abhängigkeit vom Typ
    - $s \sim t$ gilt, wenn s und t zum gleichen Term reduzierbar sind oder in $\mathbb{Z}$ oder Atom semantisch gleich sind
  - Substitutionregel gilt auch für Terme die squiggle-gleich sind
- **Stark abhängige Funktionen $\{f \mid x:S \rightarrow T[f,x]\}$**
  - Selbstreferenz: Bildbereich hängt ab von Eingabe und Funktion f selbst
  - Mächtiger als abhängiger Durchschnitt, aber Beweise werden aufwendig
- **Aktuell in Entwicklung**
  - Logic of Events: Schließen über Kommunikation und verteilte Prozesse
  - Reflektion: Schließen über Beweisverfahren und das Meta-Level der CTT

Inferenzregeln zum praktischen Arbeiten

- **Direkte Berechnung**
  - Reduktion an beliebiger Stelle in Sequenz
  - Rückwärtsreduktion (vom Kontraktum zum Redex) möglich
- **Falten und Auffalten von Definitionen**
  - Einsetzen der Definition für eine benutzerdefiniere Abstraktion
  - Zugriff über den Namen des Definitionsobjektes in der Library
- **Anwendung von Lemmata**
  - Einsetzen der Konklusion oder des Extraktterms
  - Zugriff über den Namen des Lemmas in der Library
- **Entscheidungsprozeduren**
  - Bisher nur für Arithmetik und Gleichheit
- **Umbenennung und Ausdünnen**
  - Übersichtlichkeit in der Beweisführung

Siehe Appendix A.3.15 / A.3.16 des Nuprl Manuals

Übersicht: Standardtypen der CTT

Function Space	$S \to T$, $x:S \to T$	$\lambda x.t$, $f\,t$
Product Space	$S \times T$, $x:S \times T$	$\langle s,t\rangle$, let $\langle x,y\rangle = e$ in u
Disjoint Union	$S+T$	$\mathsf{inl}(s)$, $\mathsf{inr}(t)$, case e of $\mathsf{inl}(x) \mapsto u$ | $\mathsf{inr}(y) \mapsto v$
Universes	$\mathbb{U}_j$	— *types of level* j —
Equality	$s = t \in T$	Ax
Empty Type	Void	$\mathsf{any}(x)$, — *no members* —
Atoms	Atom	"*token*", if a=b then s else t
Numbers	$\mathbb{Z}$	0, 1, -1, 2, -2, ... s+t, s-t, s*t, $s \div t$, s rem t, if a=b then s else t, if i<j then s else t $\mathsf{ind}(u; x, f_x.s;\ base;\ y, f_y.t)$
	$i<j$	Ax
Lists	S list	[], $t::list$, list_ind(L; $base$; x, l, $f_l.t$)
Inductive Types	rectype $X = T[X]$	let* $f(x) = t$ in $f(e)$, — *members defined by* $T[X]$ —
Subset	$\{x:S \mid P[x]\}$,	— *some members of* S —
Intersection	$\cap x:S.T[x]$,	— *members that occur in all* $T[x]$ —
	$x:S \cap T[x]$	— *members* x *that occur* S *and* $T[x]$ —
Union	$\cup x:S.T[x]$	— *members that occur in some* $T[x]$, *tricky equality*—
Quotient	$x,y : S//E[x,y]$	— *members of* S, *new equality* —
Very Dep. Functions	$\{f \mid x:S \to T[f,x]\}$	
Squiggle Equality	$s \sim t$	— *a "simpler" equality*

Typentheorie im Rückblick

Inferenzkalkül für Mathematik & Programmierung

- **Extrem ausdrucksstarkes Inferenzsystem**
  - Vereinheitlicht und erweitert Logik, λ-Kalkül und einfache Typentheorie
  - Formalisierung "natürlicher" Gesetze der zentralen Konzepte
  - Direkte Darstellung anstatt Simulation
  - Umfangreiche Theorie bestehend aus
    - Mathematischen Grundkonzepten
    - Grundkonstrukten der Programmierung, einschließlich Rekursion
    - Prädikatenlogik (höherer Stufe)
- **Praktische Probleme**
  - Beweise erfordern viel Schreibarbeit → *Interaktive Beweissysteme*
  - Beweise sind unübersichtlich (viele Regelanwendungen)
  - Beweise sind schwer zu finden (viele Regeln und Parameter)
    → *Automatisierung der Beweisführung*

Ausblick: Themen des zweiten Teils (Sommer 2006)

Konstruiere semiautomatische Beweissysteme

- **Aufbau von Beweissystemen**
  - Implementierung interaktiver Beweisassistenten
  - Das NuPRL Logical Programming Environment
- **Beweisautomatisierung**
  - Taktisches Beweisen
  - Entscheidungsprozeduren
  - Integration externer Systeme
- **Anwendungen & Demonstrationen**
  - Entwicklung formaler Theorien
  - Programmsynthese