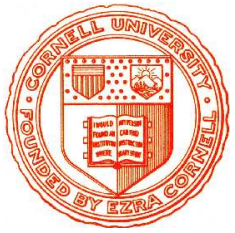
Automatisierte Logik und Programmierung

Einheit 15



Assistenzsysteme zur Implementierung formalisierter Mathematik

1. Formalisierung mathematischer Theorien
2. Verwaltung formalisierten Wissens
3. Gestaltung der Benutzerinteraktion

Theorembeweisen ist mehr als Beweissuche

- **"Echte Beweisführung" ist niemals isoliert**
  - Beweise werden nicht "von scratch" geführt, sondern in einem Kontext
    - Mathematik: Algebra, Analysis, Logik, Kategorientheorie, ...
    - Programmierung: Verifikation, Synthese, Optimierung, Security, ...
    - Physik, Elektrotechnik, Mechanik, ...
  - Kontext bestimmt Begriffswelt, Erkenntnisse, Methoden, ...
  - Beweisführung stützt sich massiv auf bekanntes Wissen
- **Logisches Schließen benötigt formales Wissen**
  - Präzisierung der Grundkonzepte der zugrundeliegenden "Theorie"
  - Formulierung der fundamentalen Einsichten der Theorie (Axiome)
  - Beweise für "ableitbare" Erkenntnisse (Sätze)
  - Formalisierung theoriespezifischer Methoden als Beweisstrategien
- **Wissen muß formal abgestützt werden**
  - Grundkonzepte werden über formale Definitionen auf CTT abgestützt
  - Axiome, Theoreme und Strategien werden aus heraus abgeleitet

Methodik des Aufbaus formaler Theorien

- **Formalisiere Grundkonzepte der Theorie**
  - Formale Notation für Datentyp, kanonische & nichtkanonische Elemente
  - Formulierung von Inferenzregeln/Axiomen für Elemente und Datentyp
- **Implementiere Grundkonzepte der Theorie**
  - Stütze Begriffe durch Abstraktionen/Display Formen auf CTT Terme ab
  - Beschreibe neue Inferenzregeln durch Taktiken
    - Bei echten Erweiterungen verwende explizite Regelobjekte
- **Erstelle erweiterte Objekttheorie**
  - Formalisiere wichtige Begriffe nur auf Basis der Grundkonzepte
  - Beweise mathematische Gesetze zu Eigenschaften abgeleiteter Konzepte insbesondere Rewrite-Lemmata zu Kombinationen von Operationen

Systematik wurde bisher nur wenig benutzt

Beispiel: Theorie endlicher Mengen

- **Theorie kann auf vier Grundbegriffe gestützt werden**

  Datentyp: $\texttt{Set}(\alpha)$

  Operationen: $\emptyset\texttt{: Set}(\alpha)$

  $\texttt{+: Set}(\alpha)\times\alpha \to \texttt{Set}(\alpha)$

  $\in\texttt{: }\alpha\times\texttt{Set}(\alpha) \to \texttt{Bool}$

  Gesetze: $\texttt{a} \notin \emptyset$

  $\texttt{x} \in \texttt{(S+a)} \Leftrightarrow \texttt{(x=a} \vee \texttt{x} \in \texttt{S)}$

  $\texttt{(S+a)+x = (S+x)+a}$

  $\texttt{(S+a)+a = S+a}$

  $\texttt{P}(\emptyset) \wedge (\forall \texttt{S:Set}(\alpha).\texttt{P(S)} \Rightarrow \forall \texttt{a:}\alpha.\texttt{P(S+a)}) \Rightarrow \forall \texttt{S:Set}(\alpha).\texttt{P(S)}$

- **Implementierung durch Restklassen von Listen**

  $\emptyset \equiv \texttt{nil}$

  $\texttt{+} \equiv \lambda\texttt{a,S. a.S}$

  $\in \equiv \lambda\texttt{a,S. } \exists \texttt{x} \in \texttt{S.x=}_b\texttt{a}$

  $=_{Set} \equiv \lambda\texttt{S,T. } (\forall \texttt{a} \in \texttt{S. a} \in \texttt{T}) \wedge (\forall \texttt{a'} \in \texttt{T. a'} \in \texttt{S})$

  $\texttt{Set}(\alpha) \equiv \texttt{(S,T):}\alpha\texttt{ list // S=}_{Set}\texttt{T}$

  Alternative Implementierungen möglich (Bitvektoren, sortierte Listen,...)

Theorie endlicher Mengen
Formalisierung wichtiger abgeleiteter Begriffe

$$
\begin{array}{lcl}
\texttt{empty?} & \equiv & \lambda \texttt{S. if S=}\emptyset\texttt{ then tt else ff} \\
\subseteq & \equiv & \lambda \texttt{S,S'. } \forall \texttt{x}\in\texttt{S.x}\in\texttt{S'} \\
\{\textit{list-exp}\} & \equiv & \textit{list-exp}\texttt{.nil} \\
\{i\texttt{..}j\} & \equiv & \texttt{ind(}j\texttt{-}i\texttt{; \_,\_.}\emptyset\texttt{; }\{j\}\texttt{; diff,j-set.j-set+(}j\texttt{-diff))} \\
\{f_x\texttt{|}x\in S\wedge p_x\} & \equiv & \texttt{list\_ind(}S\texttt{; }\emptyset\texttt{; a,\_,GSF. if }p_x\texttt{[a/}x\texttt{] then GSF+}f_x\texttt{[a/}x\texttt{] else GSF} \\
\texttt{|}S\texttt{|} & \equiv & \texttt{list\_ind(}S\texttt{; 0; a,S',card. if a}\in\texttt{S' then card else card+1)} \\
\texttt{-} & \equiv & \lambda \texttt{S,a. \{x|x}\in\texttt{S}\wedge\texttt{x}\neq\texttt{a\}} \\
\cup & \equiv & \lambda \texttt{S,S'. list\_ind(S'; S; a,\_,union.union+a)} \\
\cap & \equiv & \lambda \texttt{S,S'. \{x|x}\in\texttt{S}\wedge\texttt{x}\in\texttt{S'\}} \\
\setminus & \equiv & \lambda \texttt{S,S'. \{x|x}\in\texttt{S}\wedge\texttt{x}\notin\texttt{S'\}} \\
\bigcup & \equiv & \lambda \texttt{FAMILY. list\_ind(FAMILY; }\emptyset\texttt{; S,FAM,Union.Union}\cup\texttt{S)} \\
\bigcap & \equiv & \lambda \texttt{FAMILY. list\_ind(FAMILY; fail;} \\
 & & \qquad \texttt{S,FAM,inter. if empty?(FAM) then S else inter}\cap\texttt{S)} \\
\texttt{map} & \equiv & \lambda \texttt{f,S. \{f(x)|x}\in\texttt{S\}} \\
\texttt{reduce} & \equiv & \lambda \texttt{op,S. list\_ind(S; fail;} \\
 & & \qquad \texttt{a,S',redS'. if empty?(S') then a} \\
 & & \qquad\qquad \texttt{else if a}\in\texttt{S' then redS' else op(redS',a))} \\
T =_{Set} S \uplus S' & \equiv & T =_{Set} S\cup S' \;\wedge\; \texttt{empty?(}S\cap S'\texttt{)}
\end{array}
$$

Theorie endlicher Mengen (Auszug)
Fundamentale Gesetze abgeleiteter Konzepte

Lemmata zu "$\in$"

1. $a' \in \{a\} \Leftrightarrow a'=a$
2. $k \in \{i..j\} \Leftrightarrow (i \leq k \wedge k \leq j)$
3. $b \in \{f(x) | x \in S \wedge p(x)\}$
   $\Leftrightarrow \exists x \in S.\, p(x) \wedge b=f(x)$
4. $a \in \{x | x \in S \wedge p(x)\} \Leftrightarrow a \in S \wedge p(a)$
5. $a \in S - a' \Leftrightarrow a \in S \wedge a \neq a'$
6. $a \in S \cup S' \Leftrightarrow a \in S \vee a \in S$
7. $a \in S \cap S' \Leftrightarrow a \in S \wedge a \in S'$
8. $a \in S \setminus S' \Leftrightarrow a \in S \wedge a \notin S'$
9. $a \in \bigcup FAM \Leftrightarrow \exists S \in FAM.\, a \in S$
10. $a \in \bigcap FAM \Leftrightarrow \forall S \in FAM.\, a \in S$
11. $arb(S) \in S$
12. $b \in map(f,S) \Leftrightarrow \exists x \in S.\, b=f(x)$

Lemma zu "empty?"

1. $empty?(S) \Leftrightarrow S=\emptyset$
2. $empty?(S) \Leftrightarrow |S|=0$
3. $S \subseteq S' \Rightarrow empty?(S') \Rightarrow empty?(S)$
4. $\neg empty?(S+a)$
5. $\neg empty?(\{a\})$
6. $empty?(\{f(x) | x \in S \wedge p(x)\})$
   $\Leftrightarrow empty?(S) \vee \forall x \in S.\, \neg p(x))$
7. $empty?(S-a) \Leftrightarrow empty?(S) \vee S=\{a\}$
8. $empty?(S \cup S')$
   $\Leftrightarrow empty?(S) \wedge empty?(S')$
9. $empty?(S) \vee empty?(S')$
   $\Rightarrow empty?(S \cap S')$
10. $empty?(S) \Rightarrow empty?(S \setminus S')$
11. $empty?(\bigcup FAM)$
    $\Leftrightarrow \forall S \in FAM.\, empty?(S)$
12. $\exists S \in FAM.\, empty?(S)$
11. $empty?(\bigcup FAM) \Rightarrow empty?(\bigcap FAM)$

Assistenz für Entwicklung formaler Theorien

- **Beweisystem muß Wissensverarbeitung unterstützen**
  - Erzeugung formaler Definitionen, Sätze, Beweise, Methoden, Texte
  - Strukturierung formalen Wissens in Theorien und Sub-Theorien
  - Umbenennen, Verschieben, Verlinken, Entfernen von Wissen
  - Verwendung formalen Wissens in Beweisen, Methoden und Texten
  - Durchsuchen gespeicherten Wissens, suche nach “relevantem” Wissen
- **Wissensverarbeitung ist mehr als “Sammeln”**
  - Neue Erkenntnisse kommen hinzu, andere werden entfernt
  - Spezifische Beweise und Beweismethoden ändern sich
  - Konsistenz des gespeicherten Wissens muß sichergestellt sein
  - Vorhandensein gespeicherten Wissens benötigt eine Rechtfertigung
    z.B. durch Verweise auf Inferenzregeln oder externe “Autoritäten”
- **Unterstützung für dezentrales Arbeiten**
  - Export, Import, Mischen und Prüfung von (Teil-)Theorien
  - Einschränkung von Schreib- und Zugriffsrechten

Aufbau formaler Wissensbanken

- **Textorientierte Gestaltung** (Isabelle, Coq, MetaPRL, SpecWare)
  - – Objekte in konventioneller Textform, strukturiert durch Schlüsselworte
  - – Dateien werden wie Programmcode sequentiell gelesen und compiliert
  - \+ Konventionell editierbar, Informationen leicht austauschbar, einfach
  - \- Konsistenz nur durch strikt lineare Verarbeitung gesichert
  - \- Nur ein Benutzer, nur ein aktuell sichtbares Objekt
  - \- Keine Zugriffskontrolle: jeder kann alles überschreiben / löschen
- **Abstrakte Datenbank** (Nuprl)
  - – Zugriffe auf Wissensbank über Datenbankmanagementsystem
  - – DBMS verwaltet Namensgebung, Strukturierung und Zugriffsrechte
  - \- Komplexeres System, kein einfaches Editieren von Text möglich
  - \- Synchronisatzion, Import/Export von Theorien nur über das DBMS
  - \+ Multiuser-Kooperationen möglich, Viele Objekte gleichzeitig sichtbar
  - \+ Zugriffskontrolle und Transaktionskonzept sichert Konsistenz und erhöht Sicherheit gegenüber Mißbrauch, Irrtümern und Fehlern

Die Nuprl Library als formale Wissensbank

- **Externe Sicht: formales mathematisches Lehrbuch**
  - Definitionen, Sätze, Beweise, Methoden, Anmerkungen, Regeln, ...
  - Ermöglicht zusätzliche Inferenzregeln: `lemma`, `extract`,...
- **Interne Sicht: Kollektion von Bibliotheksobjekten**
  - Keine vorgegebene Strukturierung der Wissensbank
  - Externe Strukturen (Theorien, Directories, Links,...) sind aufgesetzt
- **Interne Struktur von Bibliotheksobjekten**

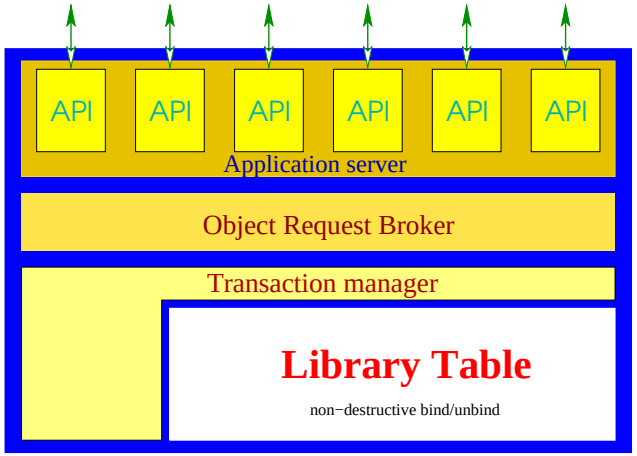
  Tupel bestehend aus Inhalt und Verwaltungsinformation

Inhalt:	Abstraktion, Display Form, Beweis, ML code, Text, ...
Art:	`ABS, DISP, STM, CODE, COM, RULE, DIR`, ...
Eigenschaft:	Status, Name, Aktiv?, Referenzumgebung, ...
Extra:	Abhängige Objekten, interne Id, sichtbare Position, ...

  Repräsentation als abstrakte Nuprl-Terme ermöglicht Selbstreflektion
  - (z.B. Darstellung von Browser & Sequenzen modifizierbar durch Display-Objekte)

Aufgaben des Wissensbankmanagementsystems

- **Bereitstellung von Operationen zur Verwaltung von Objekten**
  - Erzeugung, Löschen, Umbenennen, Verschieben, (De)Aktivieren, Drucken,
  - Strukturierung in Theorien und Directories, Browsen, Suchen, ...
- **Wissensarchivierung**
  - Zertifikate: Rechtfertigung für gespeicherte Inferenzen
  - Explizite Links und logische Abhängigkeiten zwischen Objekten
- **Anbindung anderer Komponenten**
  - Refiner, Editor, externe Systeme als Klienten
  - Mehrfache Instanzen desselben Klienten möglich
- **Datenbankoperationen**
  - Dauerhafter Objektspeicher, Konsistenzsicherung
  - Backup alter Zustände, Undo, Versionskontrolle
  - Transaktionsgesteuerter simultaner Zugriff mehrerer Klienten
  - Selektive Sichten auf Teile der Bibliothek



Implementierung der Objektsprache in der Library

- **Abstraktionsobjekte erweitern Operatorentabelle**
  - Basisterme der Theorie werden als Primitve deklariert

```
- ABS: function def
function{}(.A;x,.B[x];) == !primitive
```

  - Benutzerdefinierte Objekte werden durch andere Terme erklärt

```
- ABS: exists_uni
∃!x:T. P[x] == ∃x:T. P[x] ∧ (∀y:T. P[y] ⇒ y=x∈T)
```

- **Display-Objekte erweitern die Displaytabelle**

```
- DISP: exists_unique_df
Parens::Prec(exists)::∃!<x:var>:<T:type:*>{\?.} <P:prop:E>
 == exists_unique(<T>;<x>.<P>)
Parens::Prec(exists)::∃!<x:var>{\?.} <P:prop:E>
 == exists_unique(ℕ;<x>.<P>)
```

- **Code-Objekte enthalten ML Programme**
  - Konstruktoren, Destruktoren für objektsprachliche Terme, ...

Unterstützt schnelle, flexible Implementierung beliebiger Theorien

Datenstrukturen für formale Definitionen

- **Struktur einer Abstraktion:** $lhs \equiv rhs$
  - lhs: Abstrakter Term, dessen Unterterme Variablen sind
  - rhs: Term, dessen freie Variablen auch in lhs frei sind

  Neuer Term auf linker Seite wird durch Term der rechten Seite definiert
- **Einfache Repräsentation als Datenstruktur**
  - Datentyp: `abstype abstraction = term # term`
  - Konstruktor `mk_abstraction` testet Zusatzbedingungen
- **Abstraktionsanwendung ist aufwendiger** (Manual §7.1)
  - Pattern Matching und Instantiierung von Variablen
  - Variablen zweiter Stufe beschreiben Terme mit gebundenen Variablen
- **Separate Behandlung der Display-Form** (Manual §7.2)
  - Formale Beschreibung einer vertrauten und verständlichen Notation
    - Textliche Darstellung, Formatierung, Klammerung, Abkürzungen, ...
  - Display-Formen werden im Layout-Algorithmus des Editors verwendet

Werkzeuge zur Erzeugung formaler Theorien

- **Direkte Konstruktion von Theoriebestandteilen**
  - `AddDef*` Explizite Definition neuer Begriffe
    - Benutzer beschreibt abstrakten Term und seine CTT-Definition
    - System generiert Abstraktion & Standard Display Form
    - System generiert wf-Theorem zur Unterstützung taktischer Typechecker
    - Benutzer modifiziert Display Form
    - Benutzer formuliert und beweist wf-Theorem
  - `AddRecDef*` Definition rekursiver Konzepte
  - `MkThm*`, `MkML*` Explizite Erzeugung von Theorem- und Code-Objekten
    - System erzeugt nur das Objekt
- `AddRecMod*` **Erzeugung von Theorie Modulen**
  - Erzeugung der Basistheorie als Σ-Type der CTT Manual §4.3.2.3
    - Benutzer spezifiziert Grundtheorie als abstrakten Datentyp
    - System erzeugt "Spezifikationstheoreme" und zugehörige Definitionen
  - Erzeugung der erweiterten Objekttheorie wie oben.

Zugriff auf Objekte

- **Browsen von Theorien**
  - Interaktives Durchsuchen von Theorien mit dem Navigator
  - Benutzer sieht Namen und Anordnung der Objekte
  - Benutzer öffnet Objekte, um Inhalt zu sehen
- **Hyperlinks**
  - Terme und ML-Code enthalten Hyperlinks
  - Abstraktion / Display Form von Termen werden durch Mausklick sichtbar
  - Definition von ML Objekten werden durch Mausklick geöffnet
- **Suche**
  - `NameSearch*`: Suche nach Objekten, deren Name ein Pattern matcht
    - Systematische Namensgebung macht relevante Objekte leicht aufspürbar
  - In Erprobung: Suche nach Objekten, die bestimmte Terme enthalten
- **Obid-Collectors**
  - Aufsammeln von Objekten mit bestimmten Gemeinsamkeiten
  - Auch möglich für Objekte, auf die kein Link mehr zeigt.

Methoden zur Organisation von Wissen

- **Strukturierung der Wissensbank in Theorien**
  - Theorieobjekte sind linear geordnet zur Vermeidung von Zyklen
  - Theorien sind i.w. baumartig angeordnet
  - Theorien können von anderen Theorien abhängig gemacht werden
- **Theorieobjekte haben Referenzumgebungen**
  - Abstraktionen, Lemmata, Taktiken, etc. das Objekt benutzen darf
    - Alle Objekte, auf die das Initialobjekt der Theorie verweist
    - Alle Objekte der Theorie, die vor dem Objekt erscheinen
  - Referenzumgebung wird nach Einfügen von Objekten aktualisiert
- **Taktiken können theorieabhängig sein**
  - Autotaktik verwendet wf-Theoreme aller Abstraktionen und theorieabhängige Ergänzungstaktiken
  - Autotaktik verwendet Proof-Caching für wiederholte Beweisteile

Wichtige Objekt-Theorien in Nuprl

Basiswissen Mathematik & Programmierung

- **Arithmetik & Zahlentheorie**
  - Definition von Zahlenbereichen, Intervallen, Teilbarkeit, ...
  - Theorie der Restklassen modulo n
  - Derzeit nur als Sammlung der Arbeit verschiedener Benutzer

    (Standard Theorie: `int_1, int_2, num_thy_1`, Obvious `nat_extra`, ...)
- **Standard-Datentypen der Programmierung**
  - Endliche Listen, Mengen, Bags, Stacks, Graphen, Bäume, Arrays, ...
    - Beispiel: radhika presentation: `lists`
  - Quelle: Inhalt von Lehrmaterial, -büchern und Forschungsergebnissen
- **Je nach Bedarf: Anwendungsnahe Objekttheorien**

  (Algebra, Robbins,...)
  - Definition neuer Konzepte einer Anwendung
  - Theoreme über Eigenschaften dieser Konzepte

Begriffe für Anwendungen in der Programmsynthese

$\mathbb{B}$, true, false	Data type of boolean expressions, explicit truth values
$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$	Boolean connectives
$\forall$x$\in$S.p, $\exists$x$\in$S.p	Limited boolean quantifiers (on finite sets and sequences)
if p then a else b	Conditional
Seq(α)	Data type of finite sequences over members of α
null?, $\in$, $\sqsubseteq$	Decision procedures: emptiness, membership, prefix
[], [a], [i..j], [a_1...a_n]	Empty/ singleton sequence, subrange, sequence former
a.L, L·a	prepend a, append a to L
[f(x)|x$\in$L$\wedge$p(x)], |L|, L[i]	General sequence former, length of L, i-th element,
domain(L), range(L)	The sets {1..|L|} and {L[i]|i$\in$domain(L)}
nodups(L)	Decision procedure: all L[i] are distinct (no duplicates)
Set(α)	Data type of *finite* sets over members of α
empty?, $\in$, $\subseteq$	Decision procedures: emptiness, membership, subset
$\emptyset$, {a}, {i..j}, {a_1...a_n}	Empty set, singleton set, integer subset, set former
S+a, S-a	element addition, element deletion
{f(x)|x$\in$S$\wedge$p(x)}, |S|	General set former, cardinality
S$\cup$T, S$\cap$T, S\T	Union, intersection, set difference
$\bigcup$FAMILY, $\bigcap$FAMILY	Union, intersection of a family of sets

Benutzerinterface (Editor)

Visuelle Unterstützung zur Bearbeitung von Wissen

- **Skript-/kommandorientierte Gestaltung** (Isabelle, Coq, MetaPRL)
  - – Definitionen, Sätze, Beweise entstehen durch Eingabe von Kommandos
  - – System zeigt jeweiliges (Teil-)Ergebnis an
  - – Aufgesetztes Interface (e.g. ProofGeneral) unterstützt serielle Verarbeitung von Beweisskripten und mathematische Zeichensätze
  - \+ Geringer Aufwand, leicht zu lernen, Einsatz vertrauter Editoren möglich
  - \- Textbasiertes Vorgehen, nur aktuelles Beweisziel sichtbar
  - \- Syntax eingeschränkt durch Fähigkeiten des Parsers
- **Visuelle Interaktion** (Nuprl)
  - – Benutzer navigiert visuell durch Bibliothek, Beweisbaum, ...
  - – Strukturediteren unterstützen Manipulation verschiedenartiger Objekte
  - \- Aufwendigere Implementierung, schwieriger für Anfänger
  - \+ Flexible Syntax, Trennung zwischen Notation und Bedeutung
  - \+ Parallele Bearbeitung mehrerer Beweisziele, mehr sichtbare Information

Bestandteile des Nuprl Editors

- **Navigator**
  – Navigation durch Bibliothek und Aufruf bereitgestellter Operationen
- **Beweiseditor**
  – Beweisführung und Navigation durch Beweisbäume
- **Termeditor**
  – Strukturelles Editieren von Termen in Präsentationsform
- **Objekteditoren**
  – Erstellung und Modifikation spezifischer Objekte
- **Kommandointerface**
  – Interpretation von ML-Programmen und metasprachlichen Befehlen
- **Unabhängiger Prozess**
  – Mehrere Editoren können gleichzeitig auf dieselbe Library zugreifen

Graphische Interaktion verbesserungsfähig (i.w. Textterminal)

GUI sollte sich an aktuellen Standards orientieren ↦ DA Maik Jorra

- **Visuelle Navigation durch Bibliothek**
  - Keyboard- oder Maus-gesteuertes Durchlaufen
  - Patterngesteuerte Namenssuche
  - Springen zu gespeicherten Positionen
- **Ausführung von Bibliothekskommandos**
  - Vorbereitete "Buttons" für die wichtigsten Operationen
    - Erzeugung von Objekten, Theorien, Definitionen, Modulen
    - Löschen, Kopieren, Verschieben, Umbenennen, Drucken, ...
    - Import, Export, Drucken und Dokumentation von Theorien
  - Aufruf der Operationen öffnet Kommandomenü
- **Undo und Redo für jede Operation**
- **Anpassbar**
  - Buttons und Erscheinungsbild durch Bibliotheksobjekte definiert

Browsen der Bibliothek mit Nuprls Navigator

- Bewegung des Nav Points durch Keyboard, Maus, oder Arrow-buttons
- Öffnen von Objekten durch “rechtsgehen” (oder Mittel-Click)
- Sichtbarkeitsbereich kann vergrößert oder verkleinert werden

Editieren von Termen

- **Mathematische Notation erlaubt keine Parser**
  - Zu reichhaltig (nicht kontextfrei) und nicht einheitlich geregelt
  - Notation ist keine gute Repräsentationform für logische Konzepte
- **Typentheorie trennt Notation von Struktur**
  - Logische Struktur leichter zu verarbeiten
  - Separate Darstellungsform sorgt für verständliche Notation
- **Editiere logische Struktur von Termen**
  - bei gleichzeitiger Präsentation der Darstellungsform auf dem Bildschirm
- **Strukturediteor**
  - Erzeugung des Termbaums durch Eintrag in Slots der Darstellungsform
  - Kenntnis der genauen Syntax nicht erforderlich
  - Umdenken erforderlich: keine lineare Eingabe von Text

Benutzer kann mit verständlicher Notation arbeiten

- **Sichtbare Entwicklung von Beweisen**
  - Navigation durch Beweisbaum mit Maus und Keyboard
  - Arbeiten im einzelnen Beweisknoten
  - Kontrolliertes Interface zum Refiner (via Library)
  - Graphische Interaktion verbesserungsfähig (i.w. Textterminal)
- **Operationen auf Beweisen**
  - Erzeugung von Beweiszielen mit Term-Editor
  - Synchrone oder asynchrone Ausführung von Taktiken
  - Komprimierung und Expansion bis zu elementaren Schritten
  - Verarbeitung von Backup-Beweisen und 'Schmierblatt'-Beweisen
  - Erzeugung von Extrakt-Termen

Typischer Beweisknoten

- PRF: intsqrt

① # top 1
②
③ 1. x:ℕ
⊢ ∃y:ℕ. $y^2 \le x \wedge x < (y+1)^2$
④ BY NatInd 1
⑤ # 1 1
.....basecase.....
⊢ ∃y:ℕ. $y^2 \le 0 \wedge 0 < (y+1)^2$
⑥ BY exR ⌜0⌝
There is 1 hidden subgoal
⑤ # 1 2
.....upcase.....
1. x:ℤ
2. 0<x
3. ∃y:ℕ. $y^2 \le x-1 \wedge x-1 < (y+1)^2$
⊢ ∃y:ℕ. $y^2 \le x \wedge x < (y+1)^2$
⑤ BY

- PRF: intsqrt

① # top 1 2
② .....upcase.....
③ 1. x:ℤ
2. 0<x
3. ∃y:ℕ. $y^2 \le x-1 \wedge x-1 < (y+1)^2$
⊢ ∃y:ℕ. $y^2 \le x \wedge x < (y+1)^2$
④ BY

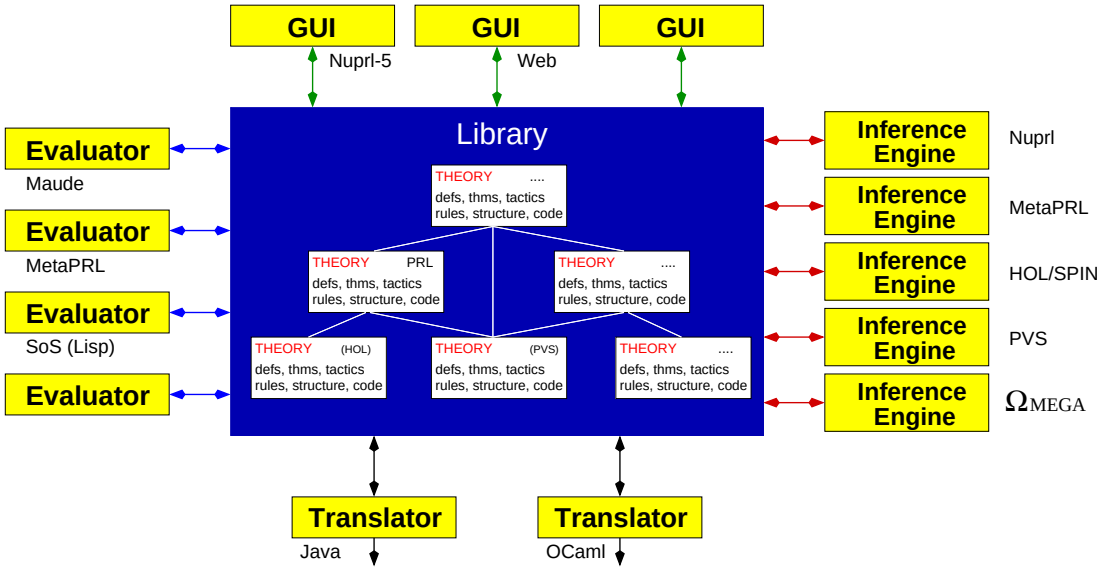
① Status und Adresse im Beweisbaum
② Annotation des Beweisknotens
③ Beweisziel (Sequenz)
④ Angewandte Beweistaktik
⑤ Teilziele mit Status, Adresse, Sequenz (neue Hypothesen)
⑥ Beweise der Teilziele, sofern vorhanden

Verarbeitung von Taktiken

- **Benutzer gibt Taktik als Inferenzschritt**
- **Beweiseditor ergänzt notwendige Daten**
  - Aktuelle Beweissequenz wird zum Beweisziel
  - Beweiseditor übergibt Beweisziel und Taktik an Refiner
  - Beweisbaum (falls vorhanden) unterhalb des Knotens wird ignoriert
- **Refiner wendet Taktik auf Beweisziel an**
  - Ergibt ungelöste Teilziele und Validierung
  - Anwendung der Validierung auf Teilziele erzeugt Beweisbaum
  - Fehlermeldung, falls Taktik nicht anwendbar
- **Library speichert Beweisbaum**
  - Rechtfertigung für den durchgeführten Inferenzschritt
  - Beweiseditor zeigt Taktik und offene Teilziele
  - Beweisbaum wird nur auf expliziten Wunsch sichtbar gemacht

Taktik wirkt wie abgeleitete Inferenzregel

NUPRL: GESAMTARCHITEKTUR



- **Kooperierende Prozesse**
  - Library im Zentrum
  - "Beliebig viele" Refiner, Editoren und externe Systeme als Klienten
  - Angebundene externe Klienten: MetaPRL, JProver
- **Kooperierende Inferenzmaschinen**
  - Asynchrones und verteiltes Theorembeweisen (In Erprobung)
- **Reflexive Systemstruktur**
  - Systemdesign in Library enthalten (und veränderbar)