Automatisierte Logik und Programmierung II

Teil IV

Automatisierte Programmierung

1. Grundkonzepte, Paradigmen & Strategien

2. Wissensbasierte Programmentwicklung

– Divide & Conquer, Globalsuche,
Lokalsuche, Problemreduktionsgeneratoren

3. Korrektheitserhaltende Optimierungen

Wozu Automatisierte Programmierung?

- **Softwareproduktion hat viele Probleme**
  - **Zeitaufwendig und teuer**
    - Entwurf und Implementierung fokussiert auf Modellierungs- und Programmiersprachen anstatt auf Eigenschaften des Problembereichs
    - Implementierung meist “von Hand” und ad hoc
    - Einbeziehung der Endanwender zu spät
  - **Zu viele Fehler im Endprodukt**
    - Logischer Zusammenhang zur Aufgabenstellung selten erkennbar
    - Begründung für Korrektheit des Programms fehlt meistens
- **Logische Synthese von Programmen hilft**
  - (Teil-)Automatisierung der Konstruktion von Algorithmen
  - Logisches Fundament erhöht Zuverlässigkeit des erzeugten Programms
  - Automatisierung verringert Entwicklungszeit und -kosten und ermöglicht frühzeitige Validierung durch Endanwender

Programmsynthese: grundsätzliches Vorgehen

Erzeuge korrekte ausführbare Programme aus Spezifikationen

1. Erstellen einer formalen Spezifikation

a) Benötigt Formalisierung des Anwendungsbereichs als **Objekttheorie**

· Welche Begriffe werden benutzt und was bedeuten sie?

· Welche mathematischen Gesetze gelten für diese Begriffe?

} vgl. §15

b) Präzisierung der Problemstellung in spezifischem Formalismus

2. Entwurf eines läuffähigen, korrekten Algorithmus

– Synthesestrategie generiert Basisversion und Korrektheitsgarantien

– Synthesesystem muß durch erfahrene Benutzer gesteuert werden

3. Erzeugung eines effizienten, korrekten Programms

a) Benutzergesteuerte Optimierungstechniken verbessern Algorithmus

b) Übertragung in Zielsprache ermöglicht weitere Optimierungen

– System garantiert jeweils die Korrekheit der Optimierungen

Programmsynthese am Beispiel: Costas-Arrays

Costas Array der Größe n:

– Permutation von $\{1..n\}$ ohne Duplikate in Zeilen der Differenzentafel

– Hilfreich für Erzeugung leicht decodierbarer Radar- und Sonarsignale

2	4	1	6	5	3
-2	3	-5	1	2	
1	-2	-4	3		
-4	-1	-2			
-3	1				
-1					

Costas Array der Ordnung 6 und seine Differenzentafel

Ziel: Berechnung aller Costas Arrays der Größe n

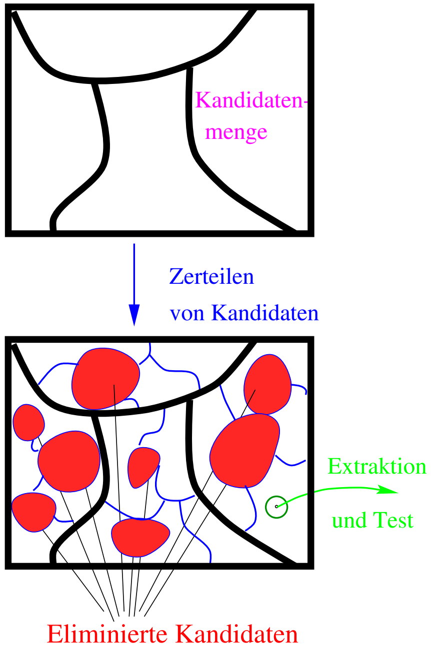
Costas-Arrays (1): formale Spezifikation

Für $n \geq 1$ berechne alle Permutationen von $\{1..n\}$
ohne Duplikate in Zeilen der Differenzentafel

- **Formalisierung vorkommender Begriffe**
  - $\texttt{perm(p,}S\texttt{)} \equiv \texttt{nodups(p)} \wedge \texttt{range(p)=}S$
  - $\texttt{nodups(}L\texttt{)} \equiv \forall \texttt{i}{\neq}\texttt{j}{\leq}|\texttt{p}|.\ L\texttt{[i]}{\neq}L\texttt{[j]}$
  - $\texttt{dtrow(p,}j\texttt{)} \equiv \texttt{[p[i]-p[i+}j\texttt{]}\ |\ \texttt{i} \in \texttt{[1..length(p)-}j\texttt{]]}$
- **Aufstellen mathematischer Gesetze**
  - Lemmas zu Eigenschaften von `perm`, `nodups`, `dtrow`
- **Präzisierung der Problemstellung**

```
FUNCTION Costas (n:ℤ) WHERE n≥1
   RETURNS {p:Seq(ℤ) | perm(p,{1..n})
                     ∧ ∀j<|p|.nodups(dtrow(p,j))}
```

Costas-Arrays (2): Erzeugung des Basisalgorithmus



- **Algorithmische Struktur ist Globalsuche**

  Standardstruktur zum Durchsuchen von Lösungsräumen

  – Codierung von Kandidatenmengen

  – Wiederholtes Aufteilen und Filtern
  auf Basis von Repräsentanten

  – Extraktion konkreter Lösungen aus Repräsentanten

- **Algorithmus wird aus Schema erzeugt**

```
FUNCTION Costas (n:ℤ) WHERE n≥1
   RETURNS {p:Seq(ℤ) | perm(p,{1..n})
                       ∧ ∀j<|p|.nodups(dtrow(p,j))}
= let rec aux (n:ℤ,s:Seq(ℤ))
  WHERE nodups(s) ∧ ∀j<|s|.nodups(dtrow(s,j))
  = {p|p∈{s} ∧ perm(p,{1..n}) ∧∀j<n.nodups(dtrow(p,j)) }
    ∪ ⋃{aux(n,t) |t∈{s·i|i∈{1..n}}
                  ∧ nodups(t)∧ ∀j<|t|.nodups(dtrow(t,j))}
  in aux(n,[])
```

Costas-Arrays (3): Optimierung
Algorithmisch-logische Vereinfachung

```
FUNCTION Costas (n:ℤ) ...
= let rec aux (n:ℤ,s:Seq(ℤ))
  WHERE nodups(s) ∧ ∀j<|s|.nodups(dtrow(s,j))
  =  {p|p∈{s} ∧ perm(p,{1..n}) ∧∀j<n.nodups(dtrow(p,j))}
   ∪ ⋃{aux(n,t) |t∈{s·i|i∈{1..n}}
                  ∧ nodups(t)∧ ∀j<|t|.nodups(dtrow(t,j))}
  in aux(n,[])
```

```
FUNCTION Costas (n:ℤ) ...
= let rec aux (n:ℤ,s:Seq(ℤ))
  WHERE nodups(s) ∧ ∀j<|s|.nodups(dtrow(s,j))
  = if {1..n}\s=∅ then {s} else ∅
     ∪ ⋃{aux(n,s·i) |i∈{1..n}\s
                      ∧ ∀j<|s|. (s[|s·i|-j]-i)∉dtrow(s,j)}
  in aux(n,[])
```

Costas-Arrays (3): Optimierung
Inkrementelle Berechnung von Teilausdrücken

```
FUNCTION Costas (n:ℤ) ...
= let rec aux (n:ℤ,s:Seq(ℤ))
  WHERE nodups(s)  ∧ ∀j<|s|.nodups(dtrow(s,j))
  = if {1..n}\s=∅ then {s} else ∅
      ∪ ⋃{aux(n,s·i) | i∈{1..n}\s
                          ∧ ∀j<|s|.(s[|s·i|-j]-i)∉dtrow(s,j)}
  in aux(n,[])
```

```
FUNCTION Costas (n:ℤ) ...
= let rec aux(n:ℤ,s:Seq(ℤ),pool:Seq(ℤ),ssize:ℤ)
  WHERE nodups(s)  ∧ ∀j<|s|.nodups(dtrow(s,j))
       ∧ pool={1..n}\s  ∧ ssize=|s|
  = if pool=∅ then {s} else ∅
      ∪ ⋃{aux(n, s·i,pool\{i},ssize+1) | i∈pool
                       ∧ ∀j<ssize.(s[ssize+1-j]-i)∉dtrow(s,j)}
  in aux(n,[],{1..n},0)
```

Costas-Arrays (3): Optimierung
Fallanalyse

```
FUNCTION Costas (n:ℤ) ...
= let rec aux(n:ℤ,s:Seq(ℤ),pool:Seq(ℤ),ssize:ℤ)
  WHERE nodups(s)  ∧ ∀j<|s|.nodups(dtrow(s,j))
        ∧ pool={1..n}\s  ∧  ssize=|s|
   = if pool=∅ then {s} else ∅
       ∪ ⋃{aux(n, s·i,pool\{i},ssize+1) | i∈pool
                          ∧ ∀j<ssize. (s[ssize+1-j]-i) ∉dtrow(s,j)}
  in aux(n,[],{1..n},0)
```

```
FUNCTION Costas (n:ℤ) ...
= let rec aux(n:ℤ,s:Seq(ℤ),pool:Seq(ℤ),ssize:ℤ)
  WHERE nodups(s)  ∧ ∀j<|s|.nodups(dtrow(s,j))
        ∧ pool={1..n}\s  ∧  ssize=|s|
   = if pool=∅  then {s}
       else ⋃{aux(n, s·i,pool\{i},ssize+1) | i∈pool
                          ∧ ∀j<ssize. (s[ssize+1-j]-i) ∉dtrow(s,j)}
  in aux(n,[],{1..n},0)
```

Costas-Arrays (3): Optimierung
Wahl der Implementierung abstrakter Datentypen

```
FUNCTION Costas (n:ℤ) WHERE n≥1 ...
= let rec aux(n:ℤ,s:Seq(ℤ),pool:Seq(ℤ),ssize:ℤ)
    WHERE nodups(s) ∧ ∀j<|s|.nodups(dtrow(s,j))
          ∧ pool={1..n}\s ∧ ssize=|s|
    = if pool=∅ then {s}
      else ⋃{aux(n, s·i,pool\{i},ssize+1) | i∈pool
                   ∧ ∀j<ssize. (s[ssize+1-j]-i)∉dtrow(s,j)}
  in aux(n,[],{1..n},0)
```

`n:ℤ` $\mapsto$ Standardimplementierung positiver ganzer Zahlen

`ssize:ℤ` $\mapsto$ Standardimplementierung positiver ganzer Zahlen

`s:Seq(ℤ)`, Elemente werden hinten angehängt $\mapsto$ umgekehrt verkettete Liste

`pool:Set(ℤ)`: Elemente werden aus fester Menge entnommen $\mapsto$ Bitvektor

Letzter Schritt vor Übertragung in konkrete Programmiersprache

Ansätze zur Entwicklung von Syntheseverfahren

- **Anwendung generischer Inferenztechniken**
  - **Beweise als Programme**
    - Automatischer Beweiser + Programmextraktion aus Beweisen
  - **Transformation von Formeln**
    - Rewrite-Techniken + Extraktion von Programmen aus Formeln
  - Gut zur Illustration der Prinzipien ("Synthese im Kleinen")
  - Konstruktion aufwendigerer Algorithmen verlangt Spezialstrategien
- **Wissensbasierte Syntheseverfahren**
  - Wissen über algorithmische Grundstrukturen formalisiert als "**Algorithmentheorien**" (Struktur + Korrektheitsaxiome)
  - Strategien verwenden Wissen zur Erzeugung effizienter Algorithmen
  - Ziel ist Unterstützung des Programmierers (statt Ersetzung)
  - Aufwendigere Vorarbeiten aber erfolgreich in der "Praxis"

Automatisierte Logik und Programmierung

Einheit 17

Syntheseparadigmen & -strategien

1. Grundkonzepte
2. Synthese im Kleinen
   – Beweise als Programme
   – Synthese durch Transformationen
3. Wissensbasierte Programmentwicklung

Komponenten einer Programmsynthese

Erzeuge korrekte ausführbare Programme aus Spezifikationen

- **Formale Spezifikation als Ausgangspunkt**
  – Beschreibung von Anwendungsbereich und Problemstellung in (umfangreicher, “natürlicher”) formaler Spezifikationssprache
  – Objekttheorie formalisiert Eigenschaften neuer Anwendungskonzepte
- **Automatische Algorithmensynthese**
  – Syntheseparadigmen: grundsätzliche Vorgehensweisen Theoretische Begründung der Korrektheit erzeugter Algorithmen
  – Synthesestrategien: Verfahren zur Steuerung der Synthese Dokumentation getroffene Entscheidungen durch Trace der Strategie
- **Optimierung und Datentypverfeinerung**
  – Verbesserung des erzeugten Basisalgorithmus
  – Wahl geeigneter Implementierungen vorkommender Datentypen
  – Sprachabhängige Optimierung bei Übertragung in Programmiersprache

Formalismus zur Spezifikation von Problemen

- **Programme berechnen im Endeffekt Funktionen**
  - Aus welchem Datentyp stammen die Eingaben? Domain D
  - Zu welchem Datentyp gehören die Ausgaben? Range R
  - Gibt es Beschränkungen an zulässige Eingaben? Input-Bedingung I
  - Was ist der Zusammenhang zwischen Ein- und Ausgaben? Output-Bedingung O
  - Eine **formale Spezifikation** ist ein Quadrupel $spec$ = `(`D`,`R`,`I`,`O`)`, wobei D und R Datentypen, I Prädikat über D, O Prädikat über $D\times R$
- **Syntaktische Notation abhängig von Aufgabenstellung**

  Erhöhte Lesbarkeit durch Schlüsselwörter und instantiierte Form von I, O
  - Bestimmung einer möglichen Lösung

    `FUNCTION` f`(`x:D`)`:R `WHERE` $I[x]$ `RETURNS` y `SUCH THAT` $O[x,y]$
  - Bestimmung aller möglichen Lösungen

    `FUNCTION` f`(`x:D`)` `WHERE` $I[x]$ `RETURNS` $\{y$`:`$R \mid O[x,y]\}$

Programme und Korrektheit

- **Programm = Spezifikation + Algorithmus**
  - Algorithmen (Programmkörper) sind berechenbare (partielle) Funktionen auf $D \not\to R$, die auf allen zulässigen Eingaben definiert sind
  - Eine **formales Programm** ist ein 5-Tupel $prog$ = $(D, R, I, O, body)$ wobei (D, R, I, O) formale Spezifikation, $body{:}D \not\to R$ berechenbar
  - Syntaktische Notation erlaubt Bezug auf Funktionsnamen in $body$

    FUNCTION $f\,(x{:}D){:}R$ WHERE $I[x]$ RETURNS y SUCH THAT $O[x,y] \;\equiv\; body[f,x]$

    FUNCTION $f\,(x{:}D)$ WHERE $I[x]$ RETURNS $\{y{:}R \mid O[x,y]\} \;\equiv\; body[f,x]$
- **Korrektheit von Programmen**
  - ***prog* ist korrekt**, falls $\forall x{:}D.\; I[x] \Rightarrow O[x, body(x)]$
- **Syntheseziel: Erfüllbarkeit von Spezifikationen**
  - ***spec* ist erfüllbar** (synthetisierbar), falls es eine Funktion $body{:}D \not\to R$ gibt, so daß $prog$= $(spec, body)$ korrekt ist

Ansätze zur Programmsynthese

- **KI-Vision: Automatisches Programmieren**
  - Intelligenter Agent ersetzt menschlichen Programmierer
  - Ziel ist vollautomatische Erzeugung von Programmen aus Spezifikationen
  - Strategien konzentrieren sich auf logisch-deduktive Verfahren
    Forschungen lieferten wichtige theoretische Grundlagen
  - Verfahren erzeugen oft nur einfache Algorithmen $\mapsto$ Synthese im Kleinen
- **Software-Engineering: Programmierunterstützung**
  - Benutzergesteuerte Erzeugung von Programmen mit Korrektheitsgarantie
    Synthesewerkzeug unterstützt den menschlichen Programmierer
  - Strategien verwenden symbolisch-algebraische Techniken und theoretische Grundlagen aus der Deduktion als Fundament
    Forschung liefert Formalisierung von Programmierwissen und -methoden
  - Verfahren liefern praktisch wertvolle Algorithmen
    $\mapsto$ Wissensbasierte Programmentwicklung

Synthese im Kleinen

Anwendung generischer Inferenzmechanismen

- **Beweise als Programme**
  – Extraktion aus konstruktivem Beweis eines Theorems
  – Fokus liegt auf automatischen Beweisverfahren
- **Synthese durch Transformationen**
  – Äquivalenzumformungen in ausführbare, meist rekursive Form
  – Fokus liegt auf algebraisch motivierten Rewrite-Techniken
- **Unterschiedliche theoretische Fundamente**
  – Problemrepräsentation, Lösungsmethodik, Extraktion des Algorithmus
  – Gegenseitige Simulation prinzipiell möglich
- **Nur gut zur Illustration von Prinzipien**
  – Konstruktion aufwendiger Algorithmen verlangt Spezialstrategien

Beweise als Programme

- **Beweise Erfüllbarkeit einer Spezifikation**

  $\texttt{FUNCTION}\ \boldsymbol{f}\,\texttt{(}\boldsymbol{x}\texttt{:}\boldsymbol{D}\texttt{)}\texttt{:}\boldsymbol{R}\ \texttt{WHERE}\ \boldsymbol{I}[\boldsymbol{x}]\ \texttt{RETURNS}\ \boldsymbol{y}\ \texttt{SUCH THAT}\ \boldsymbol{O}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$

  – Erzeuge **Spezifikationstheorem**: $\forall \boldsymbol{x}\!:\!\boldsymbol{D}.\exists \boldsymbol{y}\!:\!\boldsymbol{R}.\ \boldsymbol{I}[\boldsymbol{x}] \Rightarrow \boldsymbol{O}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$

  – Suche formalen Beweis in konstruktivem logischen Kalkül

  – Extrahiere aus Beweis einen Algorithmus zur Berechnung von y aus x

- **Rechtfertigung durch Curry Howard Isomorphismus**

  – Konstruktiver Beweis zeigt, wie Ausgabe aus Eingabe bestimmt wird

  – Implizit enthaltenes funktionales Programm ist garantiert korrekt

- **Forschungsschwerpunkte**

  – Ausdrucksstarke Kalküle

  – Effiziente Beweisstrategien und Beweisplaner (Induktion)

  – Effiziente Extraktionsmechanismen (Algorithmen ohne Beweisballast)

Formaler Beweis: Integerquadratwurzel

```
⊢ ∀n:ℕ. ∃r:ℕ. r² ≤ n < (r+1)²
BY allR

  n:ℕ
  ⊢ ∃r:ℕ. r² ≤ n < (r+1)²
  BY NatInd 1

  .....basecase.....
      ⊢ ∃r:ℕ. r² ≤ 0 < (r+1)²
  √   BY existsR ⌈0⌉ THEN Auto

  .....upcase.....
      i:ℕ⁺,  r:ℕ,  r² ≤ i-1 < (r+1)²
      ⊢ ∃r:ℕ. r² ≤ i < (r+1)²
      BY Decide ⌈(r+1)² ≤ i⌉ THEN Auto

      .....Case 1.....
          i:ℕ⁺,  r:ℕ,  r² ≤ i-1 < (r+1)²,  (r+1)² ≤ i
          ⊢ ∃r:ℕ. r² ≤ i < (r+1)²
      √   BY existsR ⌈r+1⌉ THEN Auto'

      .....Case 2.....
          i:ℕ⁺,  r:ℕ,  r² ≤ i-1 < (r+1)²,  ¬((r+1)² ≤ i)
          ⊢ ∃r:ℕ. r² ≤ i < (r+1)²
      √   BY existsR ⌈r⌉ THEN Auto
```

Beweisterm: Integerquadratwurzel

- **Mit Korrektheitsbeweisinformation**

```
let rec sqrt n
= if n=0 then <0,<Ax,Ax>>
  else let <r,%1>  = sqrt (n-1)
       in  if (r+1)²≤n  then <r+1,<Ax,Ax>>
           else <r,<Ax,Ax>>
```

- **Nach Projektion und Optimierung**

```
let rec sqrt n
= if n=0 then 0
  else let r = sqrt (n-1)
       in  if (r+1)²≤n  then r+1
           else r
```

$\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ – Synthese eines effizienteren Algorithmus durch effizienzorientierte Beweisführung

```
⊢ ∀n:ℕ. ∃r:ℕ. r²≤n<(r+1)²
BY allR
  n:ℕ
  ⊢ ∃r:ℕ. r²≤n<(r+1)²
  BY NatInd4 1
  .....basecase.....
      ⊢ ∃r:ℕ. r²≤0<(r+1)²
  √  BY existsR ⌈0⌉ THEN Auto
  .....upcase.....
      i:ℕ,  r:ℕ,  r²≤i÷4<(r+1)²
      ⊢ ∃r:ℕ. r²≤i<(r+1)²
      BY Decide ⌈((2*r)+1)²≤i⌉ THEN Auto
      .....Case 1.....
          i:ℕ,  r:ℕ,  r²≤i÷4<(r+1)²,  ((2*r)+1)²≤i
          ⊢ ∃r:ℕ. r²≤i<(r+1)²
      √  BY existsR ⌈(2*r)+1⌉ THEN Auto'
      .....Case 2.....
          i:ℕ,  r:ℕ,  r²≤i÷4<(r+1)²,  ¬(((2*r)+1)²≤i)
          ⊢ ∃r:ℕ. r²≤i<(r+1)²
      √  BY existsR ⌈2*r⌉ THEN Auto
```

```
let rec sqrt n
= if n=0 then 0
  else let r = sqrt (n÷4)
       in  if (2*r+1)²≤n  then 2*r+1
           else 2*r
```

Beweise als Programme: Eigenschaften

- **Mathematisch elegante Konstruktionsmethode**
  - Extrahiere Beweisterm t aus vollständigem Beweis für

    $\forall \boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{D}.\exists \boldsymbol{y}\colon \boldsymbol{R}.\ \boldsymbol{I}[\boldsymbol{x}] \Rightarrow \boldsymbol{O}[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$
  - Konstruiere den Programmkörper λ`x. fst(`t`(x))`
  - Optimiere durch Reduktion und Elimination überflüssiger Information
- **Korrektheitsgarantien aber geringe Effizienz**
  - Effizienz stark abhängig von Beweismethodik
  - Gewisse Effizienzsteigerungen durch verbesserte Extraktionsverfahren
- **Beweisschritte zu atomar (Assemblerniveau)**
  - Beweise für komplexe Programme interaktiv kaum durchführbar
  - Automatisierung sehr schwierig:

    Analyse der Formel, Unifikation, Suche nach geeigneten Induktionen

Nur praktikabel in Kombination mit Definitionen und Spezialtaktiken

Synthese durch Transformation

- **Transformiere in effektiv ausführbare Formel**
  - Spezifikation ist ineffektive Formel
  - Transformationen verbessern algorithmisches Verhalten der Formel
  - Vorwärtsschließen ohne konkret vorgegebenes Ziel
- **Verwende Spezifikation als (logisches) Initialprogramm**

  FUNCTION $f(x{:}D){:}R$ WHERE $I[x]$ RETURNS y SUCH THAT $O[x,y] \;\equiv\; \boldsymbol{O[x,y]}$

  - Transformiere Programmkörper in äquivalente Formel der Gestalt:

    FUNCTION $f(x{:}D){:}R$ WHERE $I[x]$ RETURNS y SUCH THAT $O[x,y] \;\equiv\; \boldsymbol{O'[x,y,f]}$

    die außer f nur noch berechenbare Prädikate enthält
  - Extrahiere Programm aus Formel oder interpretiere als Logik-Programm
- **Forschungsschwerpunkte**
  - Leistungsfähige Transformationsregeln
  - Effiziente Rewrite Techniken und Heuristiken für Vorwärtsinferenz

Einfache transformationsbasierte Synthese

- **Anwendung bedingter Ersetzungsregeln der Form**

  $$\forall z{:}T.\;\; B[z] \;\Rightarrow\; (\;\; Q[z] \;\Leftrightarrow\; Q'[z] \;\;)$$

  "*Ersetze Vorkommen von $Q[z]$ durch $Q'[z]$, falls $B[z]$ erfüllt ist*"
  – Regeln sind Äquivalenzen oder Verfeinerungen (Implikationen)
- **Regeln ergeben sich aus**
  – Lemmata der Wissensbasis, elementare Tautologien und Abstraktionen
  – Dynamisch erzeugte Definitionen und Kombinationsformen
- **Mechanismus basiert auf Vorwärtsinferenz**
  – Ziel ist bestimmte Struktur der Formel zu erreichen
  – Starke heuristische Steuerung notwendig
- **Gleichwertig zum Prinzip Beweise als Programme**
  – Transformationen durch Beweise mit Gleichheitslemmata simulierbar
  – Beweisregeln können als Rewrite-Regeln beschrieben werden
  – Nicht skalierend: Suchraum explodiert bei nichttrivialen Problemen
  – **Inferenzniveau zu niedrig** – ignoriert bekanntes Programmierwissen

Wissensverarbeitung in der Programmsynthese

Zielgerichtete Entwicklung guter Algorithmen

- **Synthese im Kleinen ist zu allgemein**
  - Fokus auf Logik statt auf Programmierung
  - Steuerung durch “normale” Programmier kaum möglich
  - Keine echte Unterstützung bei der Entwicklung von Programmen
- **Programmiermethodik verwendet Wissen**
  - Welche grundsätzlichen Algorithmenstrukturen gibt es?
  - Welche Algorithmenstrukturen sind für ein Problem geeignet?
- **Synthese sollte formales Programmierwissen verarbeiten**
  - Umsetzung von Programmiermethodik in Entwurfsstrategien
  - Schematisierung von algorithmischer Grundstrukturen
  - Axiome für Korrektheit des schematischen Algorithmus

Aufwendige Theoretische Grundlagenarbeit entlastet Syntheseprozeß

Wissensbasierte Programmentwicklung: Grundidee

- **Erzeuge Algorithmen in einem Schritt**
  - Anpassung eines schematischen Algorithmus an eine Problemstellung
  - Aus historischer Sicht: Anwendung einer High-Level Transformation
- **Vorgehen formalisiert systematische Programmierung**

  Gegeben sei die Spezifikation

  FUNCTION f (x:D):R WHERE $I[x]$ RETURNS y SUCH THAT $O[x,y]$

  - Wähle eine algorithmische Grundstruktur für die Lösung
  - Bestimme Komponenten eines schematischen Grundalgorithmus
  - Prüfe, ob Komponenten die Korrektheitsaxiome des Schemas erfüllen
  - Instantiiere Algorithmenschema
- **Forschungsschwerpunkte**
  - Analyse der allgemeinen Struktur einer Klasse von Algorithmen
  - Schematisierung durch Komponenten und Korrektheitsaxiome
  - Techniken zur Verfeinerung von Standardstrukturen

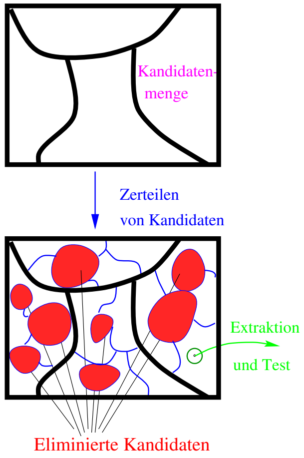
Globalsuch Synthese: Costas-Arrays Problem

- **Problemspezifikation**

  $\texttt{FUNCTION Costas (n:}\mathbb{Z}\texttt{) WHERE n}\geq\texttt{1}$
  $\texttt{RETURNS } \{\texttt{p:Seq(}\mathbb{Z}\texttt{)} \mid \texttt{perm(p,\{1..n\})} \wedge \forall\texttt{j<|p|.nodups(dtrow(p,j))}\}$

- **Grundstruktur von Globalsuch-Algorithmen**

  $\texttt{FUNCTION } f(x{:}D) \texttt{ WHERE } I[x] \texttt{ RETURNS } \{y{:}R \mid O[x,y]\}$
  $\equiv \texttt{letrec } f_{gs}(x,s) = \{z \mid z \in ext[s] \wedge O[x,z]\} \cup \bigcup\{f_{gs}(x,t) \mid t \in split[x,s] \wedge \Phi[x,t]\}$
  $\texttt{in } f_{gs}(x, s_0(x))$



- **Bedeutung der Komponenten**
  - s: Deskriptor für Mengen von Lösungskandidaten
  - $ext(s)$: Direkte Extraktion von Lösungskandidaten z aus Deskriptoren
  - $O(x,z)$: Ausgabebedingung, verwendet zur endgültigen Selektion
  - $split(x,s)$: Rekursive Aufteilung von Kandidatenmengen
  - $\Phi(x,s)$: Filter zur Elimination unnötiger Deskriptoren
  - $s_0(x)$: Initialdeskriptor für Eingabe x

- **Algorithmus nach Bestimmung der Komponenten**

  $\texttt{FUNCTION Costas (n:}\mathbb{Z}\texttt{) WHERE n}\geq\texttt{1 RETURNS } \{\texttt{p:Seq(}\mathbb{Z}\texttt{)} \mid \texttt{perm(p,\{1..n\})} \wedge \texttt{..}\}$
  $\equiv \texttt{letrec } f_{gs}\texttt{(n,s)}$
  $= \{\texttt{p} \mid \texttt{p} \in \{\texttt{s}\} \wedge \texttt{perm(p,\{1..n\})} \wedge \forall\texttt{j<n.nodups(dtrow(p,j))}\}$
  $\cup \bigcup\{f_{gs}\texttt{(x,t)} \mid \texttt{t} \in \{\texttt{s}\cdot\texttt{i} \mid \texttt{i} \in \{\texttt{1..n}\}\} \wedge \texttt{nodups(t)} \wedge \forall\texttt{j<|t|.nodups(dtrow(t,j))}\}$
  $\texttt{in } f_{gs}\texttt{(n,[])}$

DIVIDE & CONQUER SYNTHESE: SORTIERALGORITHMEN

- **Problemspezifikation**

```
FUNCTION sort(L:Seq(ℤ)):Seq(ℤ) RETURNS S
  SUCH THAT rearranges(L,S) ∧ ordered(S)
```

- **Grundstruktur von Divide & Conquer Algorithmen**

FUNCTION $f(x{:}D){:}R$ WHERE $I[x]$ RETURNS y SUCH THAT $O[x,y]$

$\equiv$ if *primitive*$[x]$ then *Directly-solve*$[x]$ else $(\textit{Compose} \circ g \times f \circ \textit{Decompose})\ (x)$

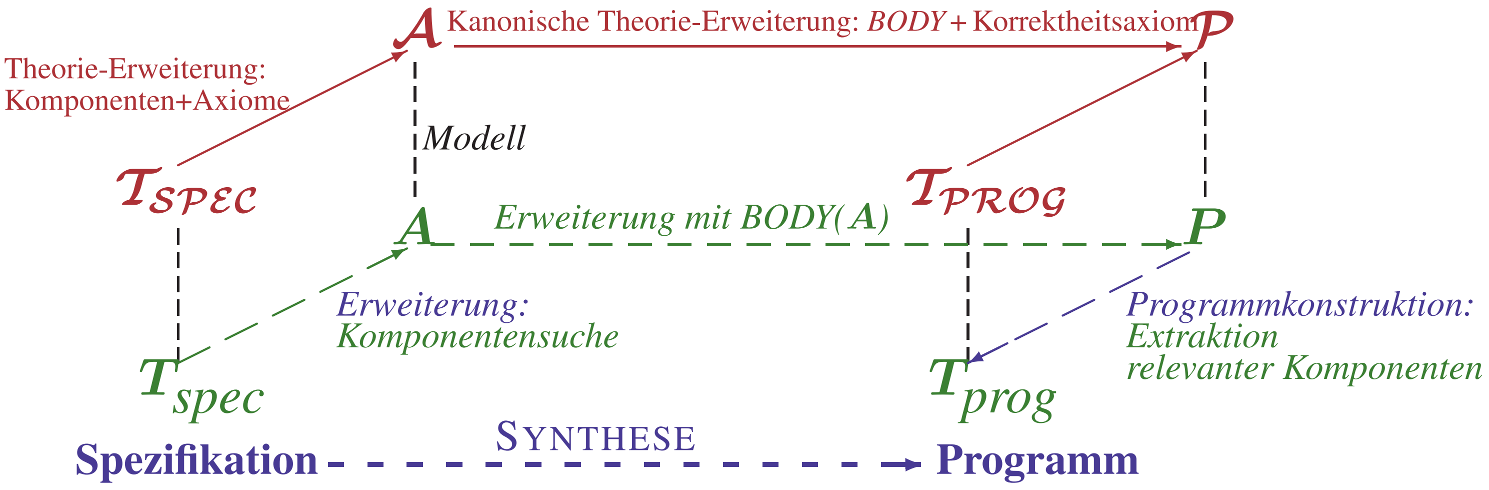
- **Komponenten für einen Sortieralgorithmus**

primitive	$\equiv$	λL. null?(L)
Directly-solve	$\equiv$	λL. []
Decompose	$\equiv$	λL. let a=L[|L|/2] in $(L_{<a}, L_{=a}, L_{>a})$ $(L_{<a} \equiv [x\|x \in L \wedge x<a])$
g	$\equiv$	sort $\times$ λS.S
Compose	$\equiv$	$\lambda S_1,S_2,S_3.\ S_1 \circ S_2 \circ S_3$

- **Instantiierter Algorithmus**

```
FUNCTION sort(L:Seq(ℤ)):Seq(ℤ) RETURNS S
  SUCH THAT rearranges(L,S) ∧ ordered(S)
≡ if null?(L) then []
     else let a=L[|L|/2]
          in sort([x|x∈L∧x<a]) ∘ [x|x∈L∧x=a] ∘ sort([x|x∈L∧x>a])
```

ALGORITHMENSCHEMATA: FORMALER HINTERGRUND



- **Algorithmische Theorien beschreiben Entwurfsmethode**
  - Algorithmentheorie = Komponenten+Axiome eines Algorithmenschemas
  - Formale Brücke zwischen allgemeiner Theorie der Spezifikationen und abstrakter Theorie korrekter Programme
- **Syntheseprozeß instantiiert allgemeine Theorien**
  - Problem = konkrete Spezifikation + Domänenbeschreibung
  - Synthese: bestimme Komponenten, welche die Axiome erfüllen
  - Korrekte Lösung ergibt sich kanonisch aus Algorithmentheorie

Technischer Grundbegriff: Algebraische Theorien

- **Eine formale Theorie $\mathcal{T}$ hat drei Komponenten**
  - S: Menge von Sortennamen (Namen für Datentypen)
  - Ω: Familie von Operationsnamen (zusammen mit Typisierung)
  - Ax: Menge von Axiomen für Datentypen und Operationen
- **Modell T für Theorie $\mathcal{T}$**
  - T ist Struktur für $\mathcal{T}$: Menge von Datentypen passend zu S
    und Operationen typisiert gemäß Ω
  - Struktur T erfüllt alle Axiome aus $\mathcal{T}$
- **Theorie $\mathcal{T}_1$ erweitert $\mathcal{T}_2$**
  - Alle Sortennamen, Operationsnamen, Axiome von $\mathcal{T}_2$ existieren in $\mathcal{T}_1$

  Struktur T_1 erweitert T_2
  - Alle Datentypen und Operationen von T_2 existieren auch in T_1
    und haben die gleiche Typisierung bezüglich $\mathcal{T}_2$

Endliche Mengen als algebraische Theorie

- **Abstrakte Theorie = Struktur + Grundgesetze**

Sorten: $\texttt{Set}(\alpha)$

Operationsnamen: $\emptyset$: $\texttt{Set}(\alpha)$

$+$: $\texttt{Set}(\alpha)\times\alpha \longrightarrow \texttt{Set}(\alpha)$

$\in$: $\alpha\times\texttt{Set}(\alpha) \longrightarrow \texttt{Bool}$

Axiome:

$\texttt{a}\notin\emptyset$

$\texttt{x}\in\texttt{(S+a)} \Leftrightarrow \texttt{(x=a} \vee \texttt{x}\in\texttt{S)}$

$\texttt{(S+a)+x = (S+x)+a}$

$\texttt{(S+a)+a = S+a}$

$\texttt{P}(\emptyset) \wedge (\forall\texttt{S:Set}(\alpha)\texttt{.P(S)} \Rightarrow \forall\texttt{a:}\alpha\texttt{.P(S+a))}$

$\Rightarrow \forall\texttt{S:Set}(\alpha)\texttt{.P(S)}$

- **Modell = Implementierung durch existierende Konzepte**

$\emptyset \equiv \texttt{nil}$

$+ \equiv \lambda\texttt{a,S. a.S}$

$\in \equiv \lambda\texttt{a,S. }\exists\texttt{x}\in\texttt{S.x=}_b\texttt{a}$

$=_{Set} \equiv \lambda\texttt{S,T. }(\forall\texttt{a}\in\texttt{S. a}\in\texttt{T}) \wedge (\forall\texttt{a'}\in\texttt{T. a'}\in\texttt{S})$

$\texttt{Set}(\alpha) \equiv \texttt{(S,T):}\alpha\,\texttt{list//S=}_{Set}\texttt{T}$

Alternative Modelle sind möglich (Bitvektoren, sortierte Listen,...)

Algorithmenschemata als algebraische Theorien

- $\mathcal{T}_{\mathcal{SPEC}}$: **Theorie der Spezifikationen**
  - Sorten: $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{R}$; Operationen: $\boldsymbol{I}$:$D{\rightarrow}\mathbb{B}$, $\boldsymbol{O}$:$D{\times}R{\rightarrow}\mathbb{B}$; keine Axiome
  - **Problemtheorie**: Erweiterung von $\mathcal{T}_{\mathcal{SPEC}}$
    Spezifikation eines Programms durch Bedingungen an I und O
- $\mathcal{T}_{\mathcal{PROG}}$: **Theorie korrekter Programme**
  - Sorten: $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{R}$; Operationen: $\boldsymbol{I}$:$D{\rightarrow}\mathbb{B}$, $\boldsymbol{O}$:$D{\times}R{\rightarrow}\mathbb{B}$, body: $D{\not\rightarrow}R$
  - Axiome: $\forall x{:}D.\, I(x) \Rightarrow O(x,\text{body}(x))$
  - **Programmtheorie**: Erweiterung von $\mathcal{T}_{\mathcal{PROG}}$
    Beschreibung einer Klasse korrekter Programme
- **Algorithmentheorie: Theorie einer Algorithmenstruktur**
  - Problemtheorie $\mathcal{A}$ mit kanonischer Erweiterung zu Programmtheorie:
  - Es gibt ein abstraktes Programmschema *BODY*, so daß für jedes Modell A von $\mathcal{A}$ die Spezifikation $spec_A$ zusammen mit *BODY*(A) korrekt ist
    (Für jedes Modell A von $\mathcal{A}$ hat $spec_A$ eine Standardlösung)

Divide & Conquer Schema als Algorithmentheorie

Sorten : D, R, D', R'

Operationen : $I\colon D\to\mathbb{B}$, $O\colon D\times R\to\mathbb{B}$, $\succ\colon D\times D\to\mathbb{B}$,
Decompose: $D\to D'\times D$, $O_D\colon D\times D'\times D\to\mathbb{B}$, $I'\colon D'\to\mathbb{B}$,
Compose: $R'\times R\to R$, $O'\colon D'\times R'\to\mathbb{B}$, $O_C\colon R'\times R\times R\to\mathbb{B}$,
$g\colon D'\to R'$, *Directly-solve*: $D\to R$, *primitive*: $D\to\mathbb{B}$

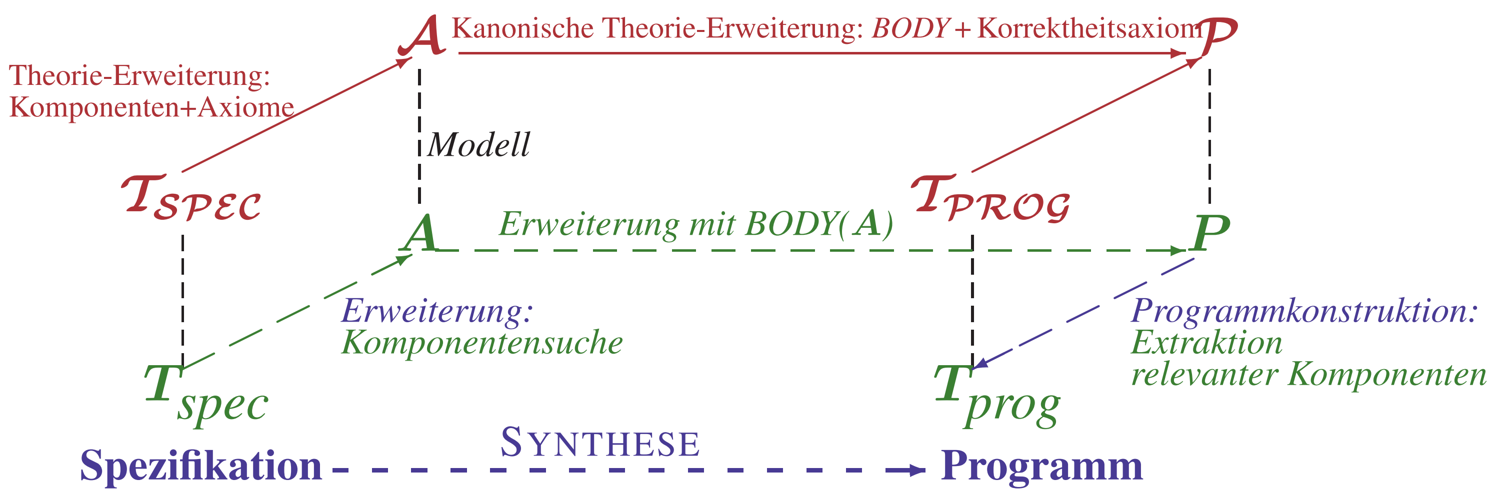
Axiome : `FUNCTION` f_p `(`x`:`D`):`R `WHERE` $I[x] \land \mathit{primitive}[x]$
`RETURNS` y `SUCH THAT` $O[x,y]$
$\equiv$ *Directly-solve*$[x]$ ist korrekt
⋮
$\succ$ *ist wohlfundierte Ordnung auf D*

Für jedes Modell A der Divide & Conquer Theorie ist

BODY(A) $\equiv$ `if` *primitive*$[x]$ `then` *Directly-solve*$[x]$
`else` `(`*Compose* $\circ$ $g\times f$ $\circ$ *Decompose*`)` (x)

ein korrektes Programm (Details in Einheit 18)

Synthese mit Algorithmenschemata präzisiert



- **Satz:** Eine Spezifikation *spec* ist erfüllbar, wenn es eine Algorithmentheorie $\mathcal{A}$ und ein Modell A für $\mathcal{A}$ gibt, das die Struktur T_{spec} erweitert
- **Synthese erweitert Problemtheorien zu Algorithmentheorien**
  - Wähle eine Algorithmentheorie $\mathcal{A}$
  - Erweitere die Spezifikation zu einem Modell A von $\mathcal{A}$
    Bestimme Komponenten und beweise, daß Axiome erfüllt sind
  - Instantiierung von *BODY(A)* liefert Modell einer Programmtheorie
  - Extrahiere Programm als Lösung der Spezifikation

Einfaches Algorithmenschema: Operator Match

Problemreduktion auf bekannte Algorithmen

- ***spec* reduzierbar auf *spec′*** **(*spec* $\trianglelefteq$ *spec′*)**

  $\forall x{:}D\,.\,I[x] \Rightarrow \exists x'{:}D'\,.\,(I'[x'] \wedge \forall y'{:}R'\,.\,O'[x',y'] \Rightarrow \exists y{:}R\,.\,O[x,y])$

  – Transformation von Ein- und Ausgaben einer gegebene Spezifikation

  – *spec* hat stärkere Eingabebedingung, schwächere Ausgabebedingung

- **Reduzierbarkeit liefert statische Problemtransformation**

  – $spec = (D, R, I, O)$ *ist erfüllbar, wenn es eine erfüllbare Spezifikation* $spec' = (D', R', I', O')$ *gibt mit* $spec \trianglelefteq spec'$

  – Beweis für $spec \trianglelefteq spec'$ liefert Substitutionen $\vartheta{:}D\to D'$, $\sigma{:}D\times R'\to R$

  – Ist $body'$ korrekter Algorithmus für $spec'$, dann definiert

  $body(x) \equiv \sigma(x,body'(\vartheta(x)))$ einen korrekten Algorithmus für *spec*

- **Einfaches Syntheseverfahren**

  – Suche erfüllbare Spezifikation $spec'$ und beweise $spec \trianglelefteq spec'$

  – Extrahiere σ und ϑ und spezialisiere *body’* zu $\lambda x.\ \sigma(x,body'(\vartheta(x)))$

  Auch geeignet zur Verfeinerung anderer Algorithmentheorien $\mapsto$ später

EINFACHES ALGORITHMENSCHEMA: GENERALISIERUNG

Problemreduktion für mengenwertige Spezifikationen

- ***spec* spezialisiert *spec′*** ($spec \ll spec'$)

  $R \subseteq R' \;\wedge\; \forall x{:}D\,.\,I[x] \Rightarrow \exists x'{:}D'\,.\,(I'[x'] \wedge \forall y{:}R\,.\,O[x,y] \Rightarrow O'[x',y])$

  – Ein- und Ausgabebedingungen von *spec* stärker als *spec′*

  – Andere Bezeichungsart: *spec′* generalisiert *spec*

- **Spezialisierung liefert Problemtransformation**

  – $spec =$ `FUNCTION` $f\,(x{:}D)$ `WHERE` $I[x]$ `RETURNS` $\{y{:}R \mid O[x,y]\}$ *ist erfüllbar, wenn* $spec \ll spec'$ *für eine erfüllbare Spezifikation* $spec'$ *gilt*

  – Beweis für $spec \ll spec_A$ liefert Substitution $\vartheta{:}D \rightarrow D'$

  – $body(x) \equiv \{\, y \mid y \in body'(\vartheta(x)) \wedge O(x,y) \,\}$ ist korrekt für *spec*

- **Syntheseverfahren**

  – Suche erfüllbare Spezifikation *spec′* und beweise $spec \ll spec'$

  – Extrahiere ϑ, spezialisiere *body’* zu $\lambda x.\,\{y \mid y \in body'(\vartheta(x)) \wedge O(x,y)\}$

  Geeignet zur Verfeinerung mengenwertiger Algorithmentheorien $\mapsto$ später

EINFACHES ALGORITHMENSCHEMA: FALLUNTERSCHEIDUNG

Statische $\vee$-Reduktion durch Zerlegung des Problems

- ***spec* zerlegbar in *spec*$_1$..*spec*$_n$** $(spec = \cup_i spec_i)$

  $\forall x{:}D\,.\,I[x] \Rightarrow I_1[x] \vee .. \vee I_n[x] \;\; \wedge \;\; \forall i{\le}n\,.\forall y{:}R\,.\; O_i[x,y] \Rightarrow O[x,y])$

  – Eingabebedingung zerlegbar in Eingabebedingungen der $spec_i$

  – Ausgabebedingung der $spec_i$ stärker

- **Zerlegbarkeit liefert Fallunterscheidung**

  – *$spec$ ist erfüllbar, wenn es erfüllbare Spezifikationen $spec_i$ gibt mit $spec = \cup_i spec_i$*

  – Sind $body_i$ korrekte Algorithmen für $spec_i$, dann ist der Algorithmus

  body(*x*) $\equiv$ if $I_1[x]$ then *body*$_{A_1}[x]$.. else *body*$_{A_n}[x]$ korrekt für $spec$

- **Syntheseverfahren "Derived Antecedants"**

  – Suche erfüllbare Spezifikation $spec_1$ mit stärkerer Ausgabebedingung

  – Wiederhole mit $spec'$=$(D, R, I \wedge \neg I_1, O)$ bis Zerlegung komplett

  – Setze einzelne Lösungen durch Fallunterscheidung zusammen

Auch geeignet zur Verfeinerung anderer Algorithmentheorien $\mapsto$ später

Unterstützungstechnik: Derived Antecedants

- **Bestimme Vorbedingungen für Gültigkeit einer Formel**
  - Formel F darf Quantoren enthalten
  - Vorbedingung P darf evtl. manche Variablen von F nicht enthalten
  - z.B. Vorbedingung für $F \equiv \exists L_1, L_2.\ |L|>|L_1| \wedge |L|>|L_2| \wedge L_1 \circ L_2 = L$ darf nur die Variable L verwenden (Lösung $P[L] \equiv |L|>1$)
- **Herleitung durch Anwendung von Reduktionsregeln**
  - Rewriting mit Äquivalenzumformungen und Implikationen

    z.B. True $\Rightarrow \exists L_1, L_2.\ L_1 \circ L_2$ und $L_1 \circ L_2 = L \Rightarrow |L_1|+|L_2| = |L|$ und $i+j>i \Leftrightarrow j>0$
  - Inferenzsystem muß hunderte von Rewrite Regeln verwalten
- **Steuerung ist heuristisch**
  - Anwendung von Regeln auf quantorenfreien Teil der Formel
  - Vorwärtsinferenz: Ziel ist syntaktischer (intensionaler) Natur

    z.B. Beschränkung der erlaubten Variablen, Größe der Formel etc.

Synthese mit integrierter Problemreduktion

Modellbildung durch statische Reduktion auf Teilmodelle

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
D_A,I_A \arrow[r, "body_A"'] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\mathbf{spec \trianglelefteq spec_A}}"] & R_A,O_A \arrow[d, "\sigma"'] \\
D,I \arrow[u, "\vartheta"] \arrow[r, dashed, "body(x)\,=\,\sigma(\vartheta(x),\,body_A(\vartheta(x)))"] & R,O
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
D_A,I_A \arrow[dr, "body_A"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\mathbf{spec \ll spec_A}}"' near end] & \\
 & R_A,O_A \arrow[d] \\
D,I \arrow[uu, "\vartheta"] \arrow[r, dashed, "body(x)=\{y \mid y \in body_A(\vartheta(x)) \wedge O(x,y)\}"] & R,O
\end{tikzcd}
$$

- **Speichere generische Modelle von Algorithmentheorien**
  - Standardkomponenten der Algorithmentheorie für wichtige Domänen
  - Axiome von $\mathcal{A}$ sind für diese Modelle a-priori bewiesen
- **Synthese reduziert Spezifikation auf gespeichertes Modell**
  - Wähle eine Algorithmentheorie $\mathcal{A}$
  - Wähle Modell A passend zur Grunddomäne von $spec$ (Liste, Menge, Baum,…)
  - Versuche $spec \trianglelefteq spec_A$ automatisch zu beweisen (proofs-as-programs)
    Mengenwertige Synthese analog mit Generalisierung $spec \ll spec_A$
  - Spezialisierung von $body_A$ korrekt für extrahierte Substitutionen σ und ϑ

Syntheseverfahren erfordert keine weiteren Inferenzen! $\mapsto$ Beispiele später

Hierarchie algorithmischer Strukturen

Allgemeine Problemstruktur
Generate & Test

Reduktionsstruktur

Lokale Struktur
$\boxed{\text{Lokalsuche}}$
Simulated Annealing

Komplementierung
Siebe

$\wedge$-Reduktion

$\vee$-Reduktion

statisch
Problemreduktion
(**Operator Match**)
(**Generalisierung**)

rekursiv
$\boxed{\text{Divide \& Conquer}}$

statisch
Bedingungen
Fallanalyse

rekursiv
$\boxed{\text{Globalsuche}}$
Binärsuche
Backtracking
Branch & Bound (A^*)

$\wedge$-$\vee$-Reduktion
$\boxed{\text{Problemreduktionsgeneratoren}}$
Dynamische Programmierung
Branch & Bound (AO^*)
Spielbaum-Suche

Algorithmenschemata: Vorteile für Synthese

- **Effizientes Syntheseverfahren**
  - **Voruntersuchungen entlasten Syntheseprozeß** zur Laufzeit
    - · Beweislast verlagert in Entwurf und Beweis der Algorithmentheorien
  - **Verfeinerung vorgefertigter Teillösungen** (Modelle) möglich
    - · zielgerichtetes Vorgehen, Verifikation der Axiome entfällt
  - Echte **Kooperation zwischen Mensch und Computer**
    - · Mensch: Entwurfsentscheidungen — Computer: formale Details
- **Erzeugung effizienter Algorithmen**
  - Vorgabe einer effizienten Grundstruktur durch Theoreme
  - Individuelle Optimierung nachträglich
- **Wissensbasiertes Vorgehen**
  - Erkenntnisse über Algorithmen als Theoreme verwendbar
- **Formales theoretisches Fundament**
  - Leicht in das Konzept beweisbasierter Systeme integrierbar