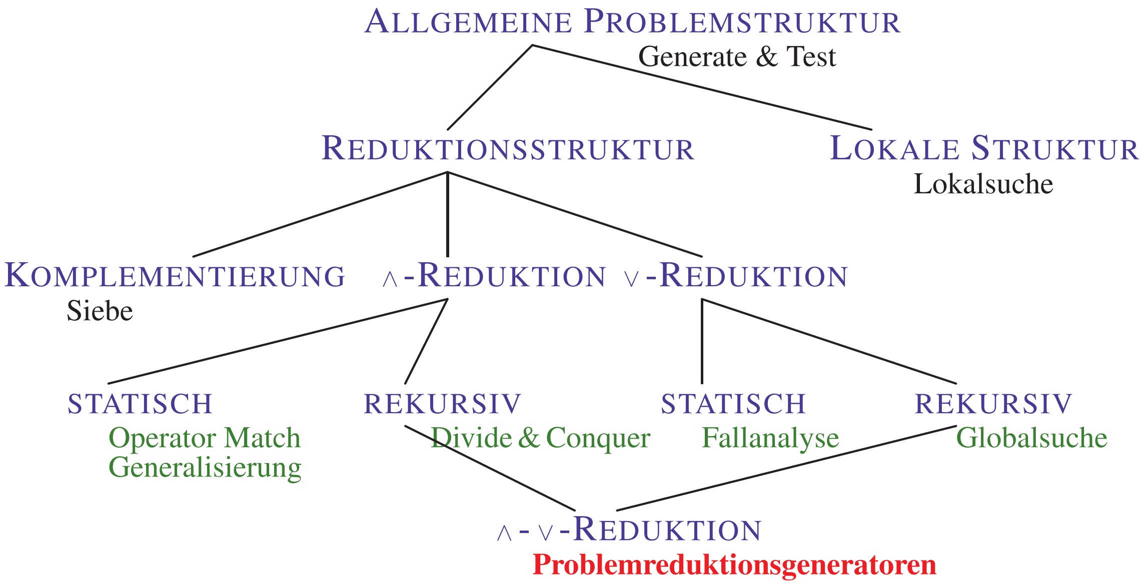
Automatisierte Logik und Programmierung

Einheit 20

Problemreduktionsgeneratoren

1. Algorithmenschema
2. Korrektheit
3. Synthesestrategie

Problemreduktionsgeneratoren



- **$\vee$-$\wedge$-Reduktion von Problemen**
  - Problem besitzt mehrere Lösungen
  - Gesamtlösung ist Summe unabhängiger Einzellösungen ($\vee$-Reduktion)
  - Einzellösungen aus Teillösungen zusammengesetzt ($\wedge$-Reduktion)
  - Verallgemeinert Dynamisches Programmieren, Spielbaumsuche, ...
- **Synthese ähnlich zu Divide & Conquer Techniken**

Ein typischer Problemreduktionsgenerator

Syntaxanalyse: bestimme alle Variablen einer Grammatik G in Chomsky-NF, aus denen ein Wort w ableitbar ist

- **Formale Problemspezifikation (abstrahiert)**

  ```
  FUNCTION Parse(G=(V,T,P,S),w:Grammars×T*)
    RETURNS {A:V | v -*-> w}
  ```

  $\texttt{FUNCTION Parse(G=(V,T,P,S),w:Grammars}\times\texttt{T}^*\texttt{)}$
  $\texttt{RETURNS } \{\texttt{A:V} \mid \texttt{v} \xrightarrow{*} \texttt{w}\}$

- **Ansatz: CYK Table-Filling Algorithmus**

  Berechne Mengen $V_{i,j} = \{A \in V \mid A \xrightarrow{*} w_i \ldots w_j\}$ für $i \leq j \leq |w|$ iterativ

  $V_{i,j} \equiv \texttt{if } i{=}j \texttt{ then } \{A \in V \mid A \rightarrow w_i \in P\}$
  $\texttt{else } \{A \in V \mid \exists i \leq k < j.\ \exists A \rightarrow BC \in P.\ B \in V_{i,k} \wedge C \in V_{k+1,j}\}$

  Lösung ist die Menge $V_{1,|w|}$

- **Berechnung der $V_{i,j}$ ist $\vee$-$\wedge$-Reduktion**
  – $\wedge$-Reduktion für jedes k: Eintrag A benötigt $B \in V_{i,k}$ und $C \in V_{k+1,j}$
  – $\vee$-Reduktion: Vereinigung der Resultate aller k zwischen i und $j-1$

VEREINHEITLICHUNG DER NOTATION

```
FUNCTION Parse(G=(V,T,P,S),w:Grammars×T*)
  RETURNS {A:V | v ─*→ w}
≡ aux(G,w,1,|w|)

FUNCTION aux(G,w,i,j:Grammars×T*×ℕ×ℕ) WHERE i,j∈{1..|w|}
  RETURNS {A:V | v ─*→ w_i..w_j}
≡ if i=j then {A | A→w_i∈P}
          else {A | ∃i≤k<j. ∃A→BC∈P.
                    B∈aux(G,w,i,k) ∧ C∈aux(G,w,k+1,j)}
```

- **Vereinheitlichung durch separierte Beschreibung**
  - Dekomposition der Suche $i..j$ an Stelle k in $\{i..k,\ k{+}1..j\}$
  - Rekursive Bestimmung der Lösung für $i..j$ wenn $i<j$
    Direkte Bestimmung der Lösung wenn $i=j$
  - Komposition der Lösungen für k (Rückwärtsanwendung der Regeln)
  - Gesamtresultat ist Vereinigung aller so entstandenen Lösungen

```
FUNCTION aux(G,w,i,j:Grammars×T*×ℕ×ℕ) ...
```

$$\equiv \bigcup_k (\mathit{Compose}_k \circ (aux_{k_1} \times aux_{k_2}) \circ \mathit{Decompose}_k)\,(i,j)$$

PROBLEMREDUKTIONSGENERATOREN: GRUNDIDEE

- **Verallgemeinertes Divide & Conquer Schema**
  - Unabhängige Divide & Conquer Algorithmen für jede Einzellösung
    - · Dekompositionen und Kompositionen verschieden
    - · Teilprobleme können einander überlappen
    - · Basisfall primitiver Eingaben wird einfaches Divide & Conquer
  - Lösung durch Vereinigung aller Einzellösungen berechnen
- **Allgemeines Algorithmenschema**

$$\texttt{FUNCTION } \boldsymbol{f}\,(x\!:\!D)\ \texttt{WHERE } I[x]\ \texttt{RETURNS } \{y\!:\!R \mid O[x,y]\}$$
$$\equiv\ \bigcup_i\,(\mathit{Compose}_i \circ (f_{i_1}\times..\times f_{i_k}) \circ \mathit{Decompose}_i)\,(x)$$

- **4 zentrale Komponenten der Algorithmentheorie**
  - *Decompose*$_i$: $D \to D_{i_1}\times..\times D_{i_k}$ Aufspalten der Eingabe in Teilprobleme
  - Hilfsfunktionen $\boldsymbol{f_{i_j}}$: $D_{i_j} \to R_{i_j}$ evtl. rekursiver Aufruf von $\boldsymbol{f}$
  - *Compose*$_i$: $R_{i_1}\times..\times R_{i_k} \to R$ Zusammensetzen der Teillösungen
  - Wohlfundierte Ordnung $\succ$ für Terminierungsgarantie
  - **Erweitertes Strong Problem Reduction Principle**

Syntaxanalyse als Problemreduktionsgenerator

- **Schematischer Algorithmus der Hilfsfunktion**

  FUNCTION aux... $\equiv \bigcup_k (Compose_k \circ (aux_{k_1} \times aux_{k_2}) \circ Decompose_k)\,(i,j)$

- **Formale Komponenten des Schemas**
  - Grammatik G und Wort w sind Konstante der Hilfsfunktion aux
  - $Decompose_k(i,j) \equiv (\,(i,k),\ (k{+}1,j)\,)$
  - $aux_{k_1}(i,j) = aux_{k_2}(i,j) \equiv$ `if` $i{=}j$ `then` $\{A \in V \mid A \rightarrow w_i \in P\}$ `else` $aux\,(i,j)$
  - $Compose_k(V,V') \equiv \{A \in V \mid \exists A \rightarrow BC \in P.\ B \in V \wedge C \in V'\}$

- **Instantiierter Algorithmus (nach Simplifikationen)**

  FUNCTION Parse(G=(V,T,P,S),w:Grammars$\times$T*) RETURNS $\{$A:V$\mid$v $\xrightarrow{*}$ w$\}$
  $\equiv$ aux(G,w,1,$|$w$|$)

  FUNCTION aux(G,w,i,j:Grammars$\times$T$^*\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$) WHERE i,j$\in\{$1..$|w|\}$
  RETURNS $\{$A:V $\mid$ v $\xrightarrow{*}$ w$_i$..w$_j\}$
  $\equiv \bigcup\{\,\{$A $\mid$ $\exists$A$\rightarrow$BC$\in$P. (if i=k then B$\rightarrow$w$_i\in$P else B$\in aux$(G,w,i,k))
  $\wedge$ (if k+1=j then C$\rightarrow$w$_j\in$P else C$\in aux$(G,w,k+1,j))$\}$
  $\mid$ k$\in\{$i..j-1$\}\,\}$

Korrektheit von Problemreduktionsgeneratoren

$\texttt{FUNCTION}\ f\ (x\!:\!D)\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ \{y\!:\!R \mid O[x,y]\}$

$\equiv\ \bigcup_i\ (Compose_i\ \circ\ (f_{i_1}\times..\times f_{i_k})\ \circ\ Decompose_i)\ (x)$

ist korrekt, wenn 5 Axiome erfüllt sind

---

1. O ist rekursiv zerlegbar in O_{D_i}, $O_{i_1}\times..\times O_{i_k}$ und O_{C_i} *(SPRP)*

$$O[x,z]\ \Leftrightarrow\ \exists i{:}\mathbb{N},\ \bar{y}_i{=}(y_{i_1},..,y_{i_k}){:}D_{i_1}\times..D_{i_k},\ \bar{w}_i{=}(w_{i_1},..,w_{i_k}){:}R_{i_1}\times..R_{i_k}.$$
$$O_{D_i}[x,\bar{y}_i]\ \wedge\ O_{i_1}[y_{i_1},w_{i_1}]\wedge..\wedge O_{i_k}[y_{i_k},w_{i_k}]\ \wedge\ O_{C_i}[\bar{w}_i,z]$$

2. Dekompositionen erfüllen O_{D_i} und 'verkleinern' Problem

$\texttt{FUNCTION}\ f_{d_i}\ (x{:}D)\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ \{\bar{y}_i{:}D_{i_1}\times..D_{i_k} \mid O_{D_i}[x,\bar{y}_i]\wedge x{\succ}\bar{y}_i\wedge I_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i]\}$

wobei $x{\succ}\bar{y}_i\ \equiv\ x\succ y_{i_j}$ für alle j mit $D_{i_j}{=}D$

3. Hilfsfunktionen f_{i_j} erfüllen O_{i_j}

$\texttt{FUNCTION}\ f_{i_j}\ (y_{i_j}\!:\!D_{i_j})\ \texttt{WHERE}\ I_{i_j}[y_{i_j}]\ \texttt{RETURNS}\ \{w_{i_j}{:}R_{i_j} \mid O_{i_j}[y_{i_j},w_{i_j}]\}$

4. Kompositionen erfüllen O_{C_i}

$\texttt{FUNCTION}\ f_{c_i}\ (\bar{w}_i\!:\!R_{i_1}\times..\times R_{i_k})\ \texttt{WHERE true RETURNS}\ \{z_i{:}R \mid O_{C_i}[\bar{w}_i,z_i]\}$

5. Verkleinerungsrelation $\succ$ ist wohlfundierte Ordnung auf D

KORREKTHEITSBEWEIS ANALOG ZU DIVIDE & CONQUER

$\texttt{FUNCTION}\ \boldsymbol{f}\,(x\!:\!D)\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ \{y\!:\!R \mid O[x,y]\}$
$\equiv \bigcup_i (Compose_i \circ (f_{i_1}\times..\times f_{i_k}) \circ Decompose_i)\ (x)$

- **Partielle Korrektheit: strukturelle Induktion über ($\boldsymbol{D},\succ$)**
  - $z \in f(x) \;\Leftrightarrow\; \exists i.\ z \in (Compose_i \circ (f_{i_1}\times..\times f_{i_k}) \circ Decompose_i)\,(x)$
  - $Decompose_i[x]$ liefert alle $\bar{y}_i{=}(y_{i_1}, .., y_{i_k})$ mit $O_{D_i}[x, \bar{y}_i]$ und $x \succ \bar{y}_i$ Axiom 2
  - Jedes $f_{i_j}(y_{i_j})$ liefert alle w_{i_j} mit $O_{i_j}[y_{i_j}, w_{i_j}]$ Axiom 3
  - $Compose_i[w_{i_1}, .., w_{i_k}]$ liefert alle z_i mit $O_{C_i}[w_{i_1}, .., w_{i_k}, z_i]$ Axiom 4
  - z ist eines dieser z_i und es gilt $O[x, z]$ Axiom 1

$$\boldsymbol{O[x,z] \;\Leftrightarrow\; \exists i{:}\mathbb{N},\ \bar{y}_i{=}(y_{i_1}, .., y_{i_k}){:}D_{i_1}\times..D_{i_k},\ \bar{w}_i{=}(w_{i_1}, .., w_{i_k}){:}R_{i_1}\times..R_{i_k}\,.\ O_{D_i}[x,\bar{y}_i] \wedge O_{i_1}[y_{i_1}, w_{i_1}] \wedge .. \wedge O_{i_k}[y_{i_k}, w_{i_k}] \wedge O_{C_i}[\bar{w}_i, z]}$$

- **Terminierung: Wohlfundiertheit von $\succ$** Axiom 5

- **Rekursion und Basisfälle implizit in Hilfsfunktionen $\boldsymbol{f_{i_j}}$ enthalten**

SYNTHESESTRATEGIE IST ANALOG ZU DIVIDE & CONQUER

- **Grundstrategie**
  - Wähle $Decompose_i$ aus Wissensbank
  - Konstruiere Hilfsfunktionen f_{i_j} heuristisch und dann $Compose_i$
  - Wähle $\succ$ aus Wissensbank und verfiziere $Decompose_i$ und das SPRP
  - Instantiiere Algorithmenschema und simplifiziere Resultat
- **Umgekehrte Strategie**
  - Wähle $Compose_i$ aus Wissensbank, bestimme f_{i_j}, $Decompose_i$ und $\succ$
- **Aufspaltung des Reduktionsprinzips in 2 Axiome**
  - **Starke Korrektheit** bzgl. Komposition und Dekomposition

$$\forall i{:}\mathbb{N}, x{:}D, \bar{y}_i{:}D_{i_1}\times..D_{i_k}, \bar{w}_i{:}R_{i_1}\times..R_{i_k}, z{:}R. \tag{1}$$
$$I[x] \wedge I_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i] \wedge O_{i_1}[y_{i_1}, w_{i_1}] \wedge .. \wedge O_{i_k}[y_{i_k}, w_{i_k}] \wedge O_{C_i}[\bar{w}_i, z] \;\Rightarrow\; (O_{D_i}[x, \bar{y}_i] \Leftrightarrow O[x, z])$$
$$\forall i{:}\mathbb{N}, x{:}D, \bar{y}_i{:}D_{i_1}\times..D_{i_k}, \bar{w}_i{:}R_{i_1}\times..R_{i_k}, z{:}R. \tag{2}$$
$$I[x] \wedge I_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i] \wedge O_{D_i}[x, \bar{y}_i] \wedge O_{i_1}[y_{i_1}, w_{i_1}] \wedge .. \wedge O_{i_k}[y_{i_k}, w_{i_k}] \;\Rightarrow\; (O_{C_i}[\bar{w}_i, z] \Leftrightarrow O[x, z])$$

  Hilfsmittel zur Konstruktion von $Decompose_i$ bzw. $Compose_i$

  - **Vollständigkeit** bzgl. Komposition

$$\forall i{:}\mathbb{N}, x{:}D, \bar{w}_i{:}R_{i_1}\times..R_{i_k}, z{:}R.$$
$$I[x] \wedge O[x, z] \wedge O_{C_i}[\bar{w}_i, z] \;\Rightarrow\; \exists \bar{y}_i{:}D_{i_1}\times..D_{i_k}. \, (I_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i] \wedge O_{i_1}[y_{i_1}, w_{i_1}] \wedge .. \wedge O_{i_k}[y_{i_k}, w_{i_k}])$$

Wichtige Hilfsmittel für die Synthesestrategie

- **Standard-Zerlegungen für Typen** $\mapsto$ *Decompose*$_i$
  - Endliche Listen, Intervalle: Spaltung in Teillisten/-intervalle an Stelle i
  - Endliche Mengen: Spaltung nach Größe der Elemente
  - Bäume: Spaltung in Wurzel und alle Teilbäume

  $\vdots$

- **Standard-Kompositionen für Typen** $\mapsto$ *Compose*
  - Endliche Folgen/Intervalle: Verkettung der Teile
  - Endliche Mengen: Vereinigung von Teilmengen(familien)
  - Bäume: Zusammensetzung von Teilbäumen mit neuer Wurzel

  $\vdots$

- **Standard-Wohlordnungen auf Datentypen** $\mapsto$ $\succ$
  - Längen und Größenordnungen, Lexikographische Ordnung, etc
- **Heuristische Fixierung der Hilfsfunktionen** $\mapsto$ f_{i_j}
  - Wähle $f_{i_j}{:=}f$, wo möglich
  - Für minimale Elemente bzgl. $\succ$ berechne direkte Lösung

SYNTHESESTRATEGIE IM DETAIL

- **Grundstrategie**

  1. Wähle Dekompositionsstruktur *Decompose*$_i$ aus Wissensbank
  2. Konstruiere Hilfsfunktionen f_{i_j} (Identität oder rekursiver Aufruf von f)
  3. Konstruiere Kompositionen *Compose*$_i$ mit Korrektheitsaxiom 2
     $I[x] \wedge I_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i] \wedge O_{D_i}[x,\bar{y}_i] \wedge O_{i_1}[y_{i_1}, w_{i_1}] \wedge .. \wedge O_{i_k}[y_{i_k}, w_{i_k}] \Rightarrow (O_{C_i}[\bar{w}_i, z] \Leftrightarrow O[x,z])$
     Vereinfache $O[x,z]$ im Kontext zu einer Formel über $\bar{w}_i$ und z
  4. Wähle $\succ$ aus der Wissensbank und verifiziere *Decompose*$_i$
  5. Verifiziere Vollständigkeitsaxiom
     $I[x] \wedge O[x,z] \wedge O_{C_i}[\bar{w}_i, z] \Rightarrow \exists \bar{y}_i{:}D_{i_1} \times .. D_{i_k}.\ (I_{i_1,..i_k}[\bar{y}_i] \wedge O_{i_1}[y_{i_1}, w_{i_1}] \wedge .. \wedge O_{i_k}[y_{i_k}, w_{i_k}])$
  6. Instantiiere Algorithmenschema

- **Umgekehrte Strategie analog**
  – Wähle *Compose*$_i$ aus Wissensbank, bestimme f_{i_j}, *Decompose*$_i$ und $\succ$

Durchführung aufwendiger als bei Divide & Conquer

Anwendungen für Problemreduktionsgeneratoren

- **Suche alle kürzesten Verbindungen im Graphen G**
  - Gegeben Verbindungsgewichte $w(i,j)$ zwischen Knoten i und j bestimme Länge $d(i,j)$ aller kürzesten Pfade von i nach j
  - Floyd Warshall Algorithm: Berechne $d(i,j) := d^{|V|}(i,j)$ mit $d^k(i,j)$ `= if k=0 then` $w(i,j)$ `else min`$\{d^{k-1}(i,j),\ d^{k-1}(i,k{-}1)+d^{k-1}(k{-}1,j)\}$
- **Bestimme alle binären Suchbäume einer Menge S**
  - Alle möglichen Arten, eine geordnete Menge zu durchlaufen
  - Verwendung der umgekehrten Strategie mit Composition `mk_tree`
  - `All-BST(`$\{s_i,..,s_j\}$`) = if i>j then` $\perp$ `else` $\bigcup_{k=i}^{j}$ `{let ltrees = All-BST(`$\{s_i,..,s_{k-1}\}$`)` `and rtrees = All-BST(`$\{s_{k+1},..,s_j\}$`)` `in mk_all_trees(ltrees,`s_k`,rtrees) }`
- **Beispiele ähnlicher Algorithmen**
  - Bestimmung positiver Zyklen in gewichteten Graphen
  - Maximale Segmentsumme, Längste aufsteigende Teilfolge, ...