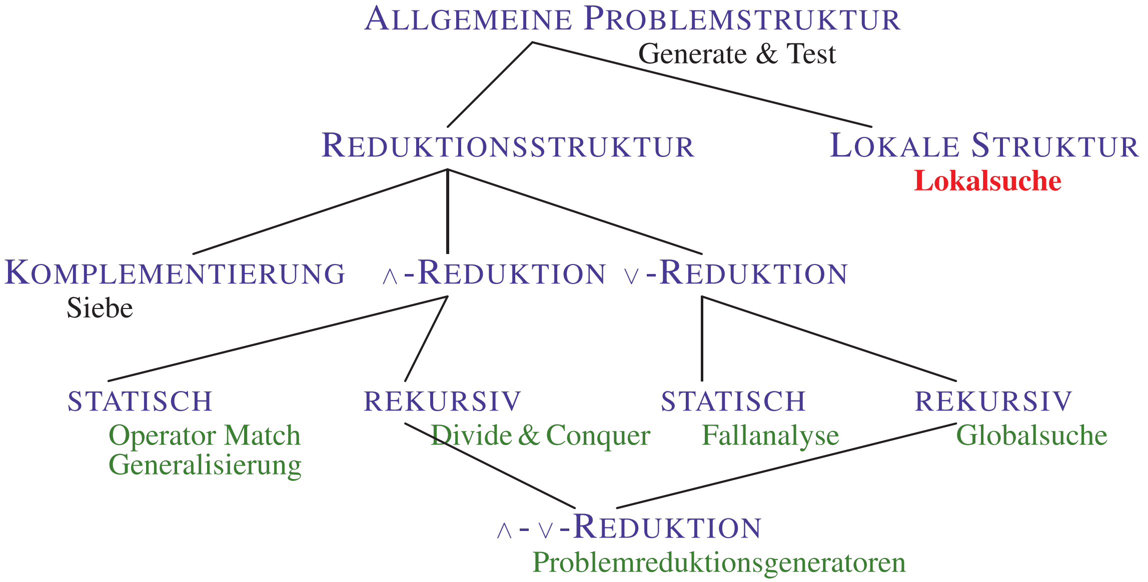
Automatisierte Logik und Programmierung

Einheit 21

Lokalsuch-Algorithmen

1. Algorithmenschema
2. Korrektheit
3. Wissensbasierte Unterstützung
4. Synthesestrategie

LOKALSUCH-ALGORITHMEN



- **Problemlösung durch kleine (lokale) Veränderungen**
  - Beginne Suche irgendwo im Raum akzeptabler Lösungen
  - Versuche Qualität der (Teil-)Lösung schrittweise zu verbessern
  - Gut für Optimierungsprobleme (Travelling Salesman, Scheduling, ...)
  - Erfordert Bewertung der Qualität von Elementen des Bildbereichs
- **Andererartiger Ansatz ohne Problemreduktion**
  - Schwerpunkt liegt auf Durchsuchen einer lokale Nachbarschaft
  - Methode des Hillclimbing: Suchen, solange es noch aufwärts geht

Ein typischer Lokalsuch-Algorithmus

Minimiere $\Sigma_{i=1}^{n} c_i y_i$ wobei $\Sigma_{j=1}^{m} A_{i,j} y_i \leq b_j$ und $y_i \geq 0$

Unterbestimmtes System: Anzahl der Gleichungen (m) kleiner als Zahl der Variablen (n)

- **Spezifikation als lineares Optimierungsproblem**

  FUNCTION LP(A, b:Seq(Seq($\mathbb{Q}^+$))×Seq($\mathbb{Q}^+$)):Seq($\mathbb{Q}^+$)
  RETURNS y
  SUCH THAT $\Sigma A_{i,j} y_i \leq b_j \wedge \forall t$:Seq($\mathbb{Q}^+$). $\Sigma A_{i,j} t_i \leq b_j \Rightarrow \Sigma c_i y_i \leq \Sigma c_i t_i$

- **Üblicher Ansatz: Lineare Programmierung**
  - **Initialisiere**: Setze $basic := \{1..m\}$,
    löse $\Sigma_{i \in basic} A_{i,j} y_i = b_j$ durch Gauß-Verfahren
  - **Optimiere $y, basic$**:
    - Wähle $i \in basic$, $k \notin basic$ so, daß $\Sigma_{i \in basic'} A_{i,j} z_i = b_j$ nach Tausch von i und k lösbar ist und $\Sigma c_i z_i < \Sigma c_i y_i$
    - Falls es ein solches Paar gibt, so optimiere $z, basic'$
    - Ansonsten terminiere mit Ausgabe y

Lokalsuch-Algorithmen: einheitliche Darstellung

$\texttt{FUNCTION LP}(A,b\texttt{:Seq(Seq}(\mathbb{Q}^+))\times\texttt{Seq}(\mathbb{Q}^+)\texttt{):Seq}(\mathbb{Q}^+)\texttt{ RETURNS } y$

$\quad\texttt{SUCH THAT } \Sigma A_{i,j}y_i \le b_j \ \wedge\ \forall t\texttt{:Seq}(\mathbb{Q}^+)\texttt{.}\ \Sigma A_{i,j}t_i \le b_j \ \Rightarrow\ \Sigma c_i y_i \le \Sigma c_i t_i$

Initialisiere: Setze $basic$:=$\{1..m\}$, löse $\Sigma_{i\in basic} A_{i,j}y_i = b_j$ durch Gauß-Verfahren

Optimiere y, $basic$:
- · Wähle $i\in basic$, $k\notin basic$ so, daß $\Sigma_{i\in basic'} A_{i,j}z_i = b_j$ nach Tausch von i und k lösbar ist und $\Sigma c_i z_i < \Sigma c_i y_i$
- · Falls es ein solches Paar gibt, so optimiere $z, basic'$
- · Ansonsten terminiere mit Ausgabe y

- **Struktur der Spezifikation**

$\texttt{FUNCTION } f_{opt}(x\texttt{:}D)\texttt{:}R \texttt{ WHERE } I[x] \texttt{ RETURNS } y$

$\quad\texttt{SUCH THAT } O[x,y] \ \wedge\ \forall t\texttt{:}R\texttt{.}\ (O[x,t] \ \Rightarrow\ c[x,y]\le c[x,t])$

Ergebnis y soll kostenoptimal unter den möglichen Lösungen der Spezifikation sein

- **Struktur des Lösungsalgorithmus**

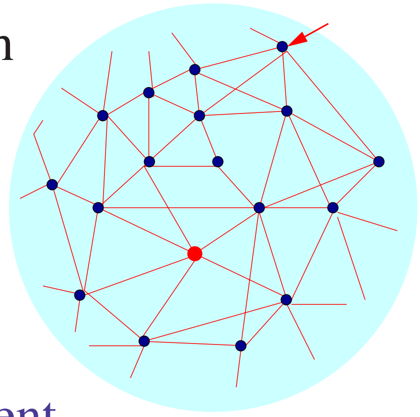
Optimiere Initiallösung y schrittweise durch kleine Veränderungen

```
let fLS(x,y) = if locally-optimal(y,O,cost) then y
                  else let z loc-arbitrary with O[x,z] ∧ c[x,z]<c[x,y]
                          in fLS(x,z)
in fLS(x,Init[x])
```

Bessere Werte z werden jeweils in einer lokal beschränkten Umgebung von y gesucht

Lokalsuch-Algorithmen: Generelle Idee

- **Optimierung als Minimierung von Kosten**
  - Spezifikation des Problems besitzt viele mögliche "Lösungen"
  - Lösungen werden bewertet nach Nutzen, Kosten, Korrekheitsgrad, ...
  - Gesucht ist Lösung mit optimaler (o.B.d.A. minimaler) Bewertung
  - Exakte Optimierung oft $\mathcal{NP}$-vollständig
- **Lösungsverfahren durchsucht Nachbarschaft**
  - Übergang auf Nachbarn, solange Verbesserungen möglich
    bei LP z.B. auf benachbarte Mengen von Basisvariablen
  - Verfahren endet in lokalen Optima
  - Nachbarschaftsstruktur beeinflußt Güte der Lösung
    - · Zu fein $\Rightarrow$ Verfahren führt nicht zu globalem Optimum
    - · Zu grob $\Rightarrow$ Suche + Test auf lokale Optimalität ineffizient



Hauptaufgabe ist Bestimmung einer guten Nachbarschaftstruktur

Grundschema von Lokalsuch-Algorithmen

- **Einfaches Programm in formaler Notation**

$\texttt{FUNCTION}\ f_{opt}\texttt{(}x\texttt{:}D\texttt{):}R\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ y$

$\quad\texttt{SUCH THAT}\ O[x,y]\ \wedge\ \forall t\texttt{:}R.\ \texttt{(}O[x,t]\ \Rightarrow\ c[x,y]\leq c[x,t]\texttt{)}$

$\equiv\ \texttt{let}\ f_{LS}\texttt{(}x\texttt{,}z\texttt{)}$

$\qquad\texttt{=}\ \texttt{if}\ \forall t\in N[x,z].\ \texttt{(}O[x,t]\ \Rightarrow\ c[x,z]\leq c[x,t]\texttt{)}\ \texttt{then}\ z$

$\qquad\qquad\texttt{else}\ f_{LS}\texttt{(}x\texttt{,}\ \texttt{arb(}\{t\mid t\in N[x,z]\wedge O[x,t]\wedge c[x,t]<c[x,z]\}\texttt{))}$

$\quad\texttt{in}\ f_{LS}\texttt{(}x\texttt{,}Init[x]\texttt{)}$

- **3 zentrale Komponenten der Algorithmentheorie**
  - c: $D\times R\rightarrow\mathcal{R}$ — Kostenfunktion auf geordnetem Kostenraum $(\mathcal{R},\leq)$
    Zusatzspezifikation des Optimierungsproblems
  - $Init$: $D\rightarrow R$ — Initiallösung für Basisspezifikation (D,R,I,O)
  - N: $D\times R\rightarrow\texttt{Set}(R)$ — Nachbarschaftsstruktur
    Suchraumbeschreibung für lokale Variationen

Korrektheit des Lokalsuch-Schemas

$\texttt{FUNCTION}\ f_{opt}(x{:}D){:}R\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ y$
$\quad\texttt{SUCH THAT}\ O[x,y]\ \wedge\ \forall t{:}R.\ (O[x,t]\ \Rightarrow\ c[x,y]{\leq}c[x,t])$
$\equiv\ \texttt{let}\ f_{LS}(x,z) = \texttt{if}\ \forall t{\in}N[x,z].\ (O[x,t]\ \Rightarrow\ c[x,z]{\leq}c[x,t])\ \texttt{then}\ z$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\texttt{else}$
$\quad f_{LS}(x, \texttt{arb}(\{t \mid t{\in}N[x,z] \wedge O[x,t] \wedge c[x,t]{<}c[x,z]\}))$
$\quad\texttt{in}\ f_{LS}(x, \mathit{Init}[x])$

ist korrekt, wenn 4 Axiome erfüllt sind

---

1. $\mathit{Init}[x]$ berechnet gültige Initiallösung für O

$\texttt{FUNCTION}\ f(x{:}D){:}R\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ y\ \texttt{SUCH THAT}\ O[x,y]$

2. Nachbarschaftsstruktur N ist reflexiv

$\forall x{:}D.\forall y{:}R.\ I[x] \wedge O[x,y]\ \Rightarrow\ y \in N[x,y]$

3. Lokale Optima sind exakt $\mapsto$ Optimale Algorithmen

$\forall x{:}D.\forall y{:}R.\ I[x] \wedge O[x,y]\ \Rightarrow\ (\forall t \in N[x,y].\ O[x,t] \Rightarrow c[x,y]{\leq}c[x,t])$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\ \forall z{:}R.\ (O[x,z] \Rightarrow c[x,y]{\leq}c[x,z])$

4. Alle gültigen Lösungen sind endlich erreichbar

$\forall x{:}D.\forall y,z{:}R.\ I[x] \wedge O[x,y] \wedge O[x,z]\ \Rightarrow\ \exists k{:}\mathbb{N}.\ z \in N_O^k[x,y]$

$N_O^0[x,y] = \{y\} \qquad N_O^{k+1}[x,y] = \bigcup\{\, N^k[x,t] \mid t \in N[x,y]\ \wedge\ O(x,t)\,\}$

Lokalsuch-Schema: Korrektheitsbeweis

- **Abspalten und Spezifikation der Hilfsfunktion f_{ls}**

  FUNCTION f_{opt} $(x{:}D){:}R$ WHERE $I[x]$ RETURNS y
  SUCH THAT $O[x,y] \wedge \forall t{:}R.\ (O[x,t] \Rightarrow c[x,y] \leq c[x,t])$
  $\equiv$ f_{LS} $(x, \mathit{Init}[x])$
  FUNCTION f_{ls} $(x,z{:}D \times R){:}R$ WHERE $I[x] \wedge O[x,z]$ RETURNS y
  SUCH THAT $O[x,y] \wedge \forall t \in N[x,y].\ (O[x,t] \Rightarrow c[x,y] \leq c[x,t])$
  $\equiv$ if $\forall t \in N[x,z].\ (O[x,t] \Rightarrow c[x,z] \leq c[x,t])$ then z
  else f_{LS} $(x, \mathrm{arb}(\{t \mid t \in N[x,z] \wedge O[x,t] \wedge c[x,t] < c[x,z]\}))$

- **Korrektheit von f_{opt} folgt aus der von f_{ls} mit Axiomen 1 & 3**
  - Für den Startwert $z = \mathit{Init}[x]$ gilt $O[x,z]$
  - Für $y = f_{LS}(x,z)$ gilt $O[x,y] \wedge \forall t \in N[x,y].(O[x,t] \Rightarrow c[x,y] \leq c[x,t])$
  - Mit Axiom 3 folgt $\forall t{:}R.(O[x,t] \Rightarrow c[x,y] \leq c[x,t])$

- **Partielle Korrektheit von f_{ls} folgt aus Programmkörper**
  - Hält f_{ls} mit Ausgabe z, so gilt $\forall t \in N[x,z].(O[x,t] \Rightarrow c[x,z] \leq c[x,t])$

- **Terminierung von f_{ls} folgt aus Ordnung $(\mathcal{R},\leq)$ und Axiom 4**

BEISPIEL: SORTIEREN ALS LOKALSUCHE

- **Formuliere Sortieren als Ordnungsoptimierung**
  - Einfache Basisspezifikation $O[L,S]$ = `rearranges`(L,S)
  - Kostenfunktion $c[L,S]$ = $\#_>(S)$: Anzahl der Fehlstellungen $S_i{>}S_j$ $(i{<}j)$
    Es gilt $\#_>(S)\geq 0$ und $\#_>(S){=}0 \Rightarrow$ `ordered`(S)
  - Spezifikation

```
FUNCTION sort(L:Seq(ℤ)):Seq(ℤ) RETURNS S
SUCH THAT rearranges(L,S)
     ∧ ∀S':Seq(ℤ).rearranges(L,S') ⇒ #>(S)≤#>(S')
```

- **Einfacher Lokalsuchalgorithmus**
  - Initiallösung *Init[L]* = L $\mapsto$ Axiom 1
  - Nachbarschaft $N[S,S']$ = $\texttt{permute}_{i,j}(S,S')$: vertausche S_i und S_j
    - Vertauschen ist reflexiv, Lokale Minima sind exakt $\mapsto$ Axiom 2,3
    - Alle Umordnungen erreichbar durch iteratives Vertauschen $\mapsto$ Axiom 4
  - Ergibt Sortieren durch beliebiges Austauschen von Elementen
    - Ineffizient, da zu viele Nachbarn zu prüfen (vermutlich $\mathcal{O}(n^3)$)
- **Lokalsuchalgorithmus mit kleinerer Nachbarschaft**
  - Restriktion auf $N[S,S']$ = $\texttt{perm}_i(S,S')$ = $\texttt{permute}_{i,i+1}(S,S')$
  - Ergibt Bubblesort (nach algorithmischer Optimierung)

Erzeuge effiziente Nachbarschaftsstrukturen

- **Bestimme fundamentale Nachbarschaftsstruktur auf R**
  - Beschreibe Nachbarschaft als Perturbation (Verwirbelung)
  - Inkrementelle Veränderung von Werten aus R
    - Numerik: δ-Vektoren,
    - Kombinatorik: Austausch von Komponenten
  - Formalisiere $N[x,y]$ als $\{Action[i,j,x,y] \mid i,j \in \pi[x,y]\}$
    - Änderung $Action[i,j,x,y]$ modifiziert Lösungspunkt $(x,y) \in D \times R$
    - Parameter $i,j \in \pi[x,y]$ sind "minimale Bestandteile" von (x,y)
- **Optimiere Nachbarschaftsstruktur durch Suchfilter**
  - Optimiere Nachbarschaftsstruktur durch frühzeitiges Abschneiden
    - Feasibility Constraint für $O[x,y]$
    - Optimality Constraint für $\forall t \in N[x,z].\,(O[x,t] \Rightarrow c[x,z] \leq c[x,t])$
    - ggf. Global Optimality Constraint für exakte Lösungen

Verwende vorformuliertes Programmierwissen

- **Lokalsuchtheorie: allgemeine Suchstruktur für R**
  - Vorgefertigte Nachbarschaftsstruktur, die Axiome 2–4 erfüllt
  - Formalisiert als Objekt $\mathcal{L} = (D,R,I,O,\pi,Action)$
  - Wissensbank speichert Lokalsuchtheorien für Grunddatentypen
- **z.B. Umordnung von Folgen über Datentyp α**
  - Suche $\hat{=}$ Permutation einzelner Elemente einer Folge
  - Änderungsparameter: Indizes der Eingabeliste `L`
  - Perturbation: Vertauschung zweier Elemente einer Ausgabeliste `S`

$$
\begin{array}{lllr}
\texttt{LS\_seq\_re}(\alpha) & \equiv & D & \mapsto & \texttt{Seq}(\alpha) \\
 & & R & \mapsto & \texttt{Seq}(\alpha) \\
 & & I & \mapsto & \lambda\texttt{L.true} \\
 & & O & \mapsto & \lambda\texttt{L,S.rearranges(L,S)} \\
 & & \pi & \mapsto & \lambda\texttt{L,S.(domain(S),domain(S))} \\
 & & Action & \mapsto & \lambda\texttt{i,j,L,S.}[\,\texttt{S}_{(i\leftrightarrow j)(k)} \mid \texttt{k} \in \texttt{domain(S)}\,]
\end{array}
$$

– $\texttt{(i}\leftrightarrow\texttt{j)(k)}$ $\hat{=}$ `if k=i then j  else if k=j then i  else k`

Standard-Lokalsuchtheorie für Mengen

- **Teilmengen fester Größe**
  - Suche $\hat{=}$ Austausch einzelner Elemente einer Menge
  - Änderungsparameter: Elemente der Ein- und Ausgabemenge
  - Perturbation: Austausch zweier Elemente in Ausgabemenge

$$\texttt{LS\_subsets}(\alpha) \equiv \begin{array}{lcr} D & \mapsto & \texttt{Set}(\alpha)\times\mathbb{N} \\ R & \mapsto & \texttt{Set}(\alpha) \\ I & \mapsto & \lambda\texttt{S,m.m}\leq|\texttt{S}| \\ O & \mapsto & \lambda\texttt{S,m,S'.S'}\subseteq\texttt{S} \;\wedge\; |\texttt{S'}|\texttt{=m} \\ \pi & \mapsto & \lambda\texttt{S,m,S'.(S}\backslash\texttt{S',S')} \\ Action & \mapsto & \lambda\texttt{i,j,S,m,S'.(S'}\cup\{\texttt{i}\}\texttt{)-j} \end{array}$$

Spezialisiere Lokalsuchtheorien der Wissensbank

- **Spezialisierungsmechanismen**
  - Synthetisiere Initiallösung *Init*$[x]$ für Spezifikation *spec* = (D,R,I,O)
  - Wähle $\mathcal{L}$ für Bildbereich R, so daß $spec \ll spec_{\mathcal{L}}$ beweisbar
  - Extrahiere Substitution $\vartheta{:}D{\rightarrow}D_{\mathcal{L}}$ und spezialisiere $\mathcal{L}$ mit ϑ
    - Ergibt Nachbarschaftsstruktur N für Problemstellung
- **Beispiel einer Spezialisierung, z.B. Bubblesort**

  $\texttt{FUNCTION sort(L:Seq(}\mathbb{Z}\texttt{)):Seq(}\mathbb{Z}\texttt{) RETURNS S}$
  $\texttt{SUCH THAT rearranges(L,S)}$
  $\qquad\qquad \land\ \forall\texttt{S':Seq(}\mathbb{Z}\texttt{).rearranges(L,S')} \Rightarrow \#_{>}\texttt{(S)}\leq\#_{>}\texttt{(S')}$

  - Wähle LS-Theorie $\mathcal{L}$ = $\texttt{LS\_seq\_re(}\mathbb{Z}\texttt{)}$
  - Wegen $O_{\mathcal{L}}(L,S)$= $\texttt{rearranges(L,S)}$ folgt $spec \ll spec_{\mathcal{L}}$ mit ϑ=$\texttt{id}$

Optimierung von Suchstrukturen durch Filter

Elimiere überflüssige Kandidaten aus Nachbarschaft

- **Lösungs-Filter *FC* für $\mathcal{L}_\vartheta$** *(Feasibility Constraint)*
  - Eliminiert Punkte, die keine akzeptablen Lösungen bzgl. O sind
    - $I[x] \wedge O[x,y] \wedge O[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]] \Rightarrow FC[i,j,x,y]$
  - Entspricht notwendigen Filtern der Globalsuche
- **Lokale Optimalitäts-Filter *OC* für $\mathcal{L}_\vartheta$** *(Optimality Constraint)*
  - Eliminiert kostenungünstigere Punkte von weiterer Betrachtug
    - $I[x] \wedge O[x,y] \wedge O[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]]$
      $\wedge\ c[x,y] \leq c[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]] \Rightarrow OC[i,j,x,y]$
  - Lokale Optima müssen Bedingung $\forall i,j \in \pi(x,y).\, OC(i,j,x,y)$ erfüllen
- **Exaktheits-Filter *GOC*** *(Global Optimality Constraint)*
  - Eliminiere suboptimale Lösungen (Algorithmus wird ggf. weniger effizient)
    - $I[x] \wedge O[x,y] \wedge O[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]]$
      $\wedge\ c[x,y] \leq c[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]] \wedge \forall t{:}R.\, O[x,t] \Rightarrow c[x,y] \leq c[x,t]$
      $\Rightarrow GOC[x,y]$

Synthesestrategie für Lokalsuch-Algorithmen

Start: $\texttt{FUNCTION}\ f_{opt}\,(x{:}D){:}R\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ y$
$\quad\texttt{SUCH THAT}\ O[x,y]\ \land\ \forall t{:}R.\ (O[x,t]\ \Rightarrow\ c[x,y]{\leq}c[x,t])$

1. **Wähle Lokalsuchtheorie $\mathcal{L}$ mit Ausgabetyp R** (Wissensbank)

2. **Beweise $(D,R,I,O) \ll spec_{\mathcal{L}}$**
   – Extrahiere Substitution ϑ und setze $\mathcal{L}_\vartheta$ = $(D,R,I,O,\pi_\vartheta,Action_\vartheta)$

3. **Synthetisiere Initiallösung *Init* für Spezifikation** (Standardsynthese)
   $\texttt{FUNCTION}\ f\,(x{:}D){:}R\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ y\ \texttt{SUCH THAT}\ O[x,y]$

4. **Generiere Lösungs-Filter FC für $\mathcal{L}_\vartheta$** *(Feasibility Constraint)*
   $I[x] \land O[x,y] \land O[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]]\ \Rightarrow\ FC[i,j,x,y]$
   – FC ergibt sich durch Vereinfachung der linken Seite (Vorwärtsinferenz)

5. **Generiere Optimalitäts-Filter OC für $\mathcal{L}_\vartheta$** *(Optimality Constraint)*
   $I[x] \land O[x,y] \land O[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]] \land c[x,y]{\leq}c[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]]$
   $\Rightarrow\ OC[i,j,x,y]$
   – OC ergibt sich durch Vereinfachung der linken Seite (Vorwärtsinferenz)

Synthesestrategie für Lokalsuch-Algorithmen

6. Instantiiere Schema für suboptimale Lokalsuch Algorithmen

$\texttt{FUNCTION}\ f_{opt}\,(x{:}D){:}R\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \texttt{RETURNS}\ y$
$\quad\texttt{SUCH THAT}\ O[x,y]\ \wedge\ \forall t{:}R.\ (O[x,t]\ \Rightarrow\ c[x,y]{\leq}c[x,t])$
$\equiv\ f_{LS}\,(x, Init[x])$

$\texttt{FUNCTION}\ f_{LS}\,(x,z{:}D{\times}R){:}R\ \texttt{WHERE}\ I[x]\ \wedge\ O[x,z]\ \texttt{RETURNS}\ y$
$\quad\texttt{SUCH THAT}\ O[x,y]\ \wedge\ \forall t{\in}N[x,y].\ (O[x,t]\ \Rightarrow\ c[x,y]{\leq}c[x,t])$
$\equiv\ \texttt{if}\ \forall i,j{\in}\pi[\vartheta(x),z].\ FC[i,j,x,z] \wedge O[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]]$
$\qquad\qquad \Rightarrow\ OC[i,j,x,z] \wedge c[x,z]{\leq}c[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]]\ \texttt{then z}$
$\quad\texttt{else}\ f_{LS}\,(x,\ \texttt{arb}(\{\ Action[i,j,\vartheta(x),y]\ \mid\ i,j{\in}\pi[\vartheta(x),z].$
$\qquad\qquad \wedge\ FC[i,j,x,z] \wedge O[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]]$
$\qquad\qquad \wedge\ \neg(OC[i,j,x,z] \wedge c[x,z]{\leq}c[x, Action[i,j,\vartheta(x),y]])\ \}))$

Nachgeschaltete Lösungs- und Optimalitätstests notwendig für Korrektheit
– Abarbeitung nutzt andthen/orelse Semantik von $\wedge$ und $\vee$ aus
– Algorithmus testet nur Parameter, welche die Filter FC und OC passieren

7. Generiere ggf. Bedingungen für Exaktheit *(Global Optimality Constraint)*
– Oft Verzicht auf Exaktheit zugunsten effizienterer Algorithmen

Synthese eines Lokalsuch-Sortieralgorithmus

Start: `FUNCTION sort(L:Seq(`$\mathbb{Z}$`)):Seq(`$\mathbb{Z}$`) RETURNS S`
`SUCH THAT rearranges(L,S)`
$\wedge$ `∀S':Seq(`$\mathbb{Z}$`).rearranges(L,S')` $\Rightarrow$ `#`$_>$`(S)`$\leq$`#`$_>$`(S')`

1. **Wähle Lokalsuchtheorie $\mathcal{L}$ mit Ausgabetyp** R — $\mathcal{L}$ = `LS_seq_re(`$\mathbb{Z}$`)`

2. **Beweise** $(D,R,I,O) \ll spec_{\mathcal{L}}$ — liefert ϑ=`id`

3. **Synthetisiere Initiallösung** *Init* **für Spezifikation** — setze `Init(L)=L`

4. **Generiere Lösungs-Filter** FC **für** $\mathcal{L}_\vartheta$ *(Feasibility Constraint)*

   `rearranges(L,S)` $\wedge$ `rearranges(L,S`$_{(i\leftrightarrow j)}$`)` $\Rightarrow$ `FC[i,j,L,S]`

   – Vereinfachung der linken Seite ergibt `FC[i,j,L,S]=true`

5. **Generiere Optimalitäts-Filter** OC **für** $\mathcal{L}_\vartheta$ *(Optimality Constraint)*

   `rearranges(L,S)` $\wedge$ `rearranges(L,S`$_{(i\leftrightarrow j)}$`)`
   $\wedge$ `#`$_>$`(S)`$\leq$`#`$_>$`(S`$_{(i\leftrightarrow j)}$`)` $\Rightarrow$ `OC[i,j,L,S]`

   – Vereinfachung der linken Seite ergibt `OC[i,j,L,S] = i<j` $\Rightarrow$ `S`$_i\leq$`S`$_j$

6. **Kein Exaktheitstest erforderlich**

Synthese eines Lokalsuch-Sortieralgorithmus

6. Instantiieres Schema

```
FUNCTION sort(L:Seq(ℤ)):Seq(ℤ) RETURNS S
   SUCH THAT rearranges(L,S)
             ∧ ∀S':Seq(ℤ).rearranges(L,S') ⇒ #>(S)≤#>(S')
≡ sortLS(L,L)
FUNCTION sortLS(L,S:Seq(ℤ)×Seq(ℤ)):Seq(ℤ)
   WHERE rearranges(L,S) RETURNS Y
   SUCH THAT rearranges(L,Y)
          ∧ ∀T∈{Y(i↔j)|i,j<|Y|}.(rearranges(L,T) ⇒ #>(Y)≤#>(T))
≡ if ∀i,j<|S|. rearranges(L,S(i↔j))
                ⇒ i<j⇒Si≤Sj ∧ #>(S)≤#>(S(i↔j)) then S
       else sortLS(L, arb({S(i↔j) | i,j<|S| ∧ rearranges(L,S(i↔j))
                         ∧ ¬(i<j⇒Si≤Sj ∧ #>(S)≤#>(S(i↔j)) }))
```

7. Nach Optimierung

```
FUNCTION sort(L:Seq(ℤ)):Seq(ℤ) ...
≡ sortLS(L,L)
FUNCTION sortLS(L,S:Seq(ℤ)×Seq(ℤ)):Seq(ℤ) ...
≡ if ∀i<j<|S|. Si≤Sj then S
       else sortLS(L, arb({S(i↔j) | i<j<|S| ∧ Si>Sj }))
```

Lokalsuche: Anwendungsbeispiele

- **Minimal Spanning Tree**
  - Gegeben: Graph mit gewichteten Kanten (Zugriffszeiten, Abstände,...)
  - Gesucht: Baum, auf dem alle Knoten mit minimalen Kosten erreichbar
  - Initialwert: Erzeuge spannenden Baum
  - Perturbation: Ergänze neue Kante, entferne eine andere
  - Feasibility Constraint: Entfernte Kante muß redundant sein
  - Optimality Constraint: Hinzugefügte Kante ist teurer als bisheriger Weg

- **Lineare Programmierung**
  - Minimiere lineare Funktion $f(x_1, ..x_n) = \Sigma c_i x_i$ unter Restriktionen $A_j[x_1, ..x_n]$
    Standard Darstellung: Minimiere $c \star x$ unter $A \star x = b \wedge \forall i \leq n. x_i \geq 0$
  - Initiallösung: Setze $x_{m+1}, ..x_n := 0$ und löse $A_{1..m} \star x_{1..m}$ mit $\forall i \leq m. x_i > 0$
    durch Gauß-Verfahren
  - Perturbation: Setze ein $x_i := 0$, wähle neues $x_j \neq 0$
  - Feasibility Constraint: Alte + neue x-Komponenten nach Lösung positiv
  - Optimality Constraint: Relative Kosten steigen durch Veränderung

Rückblick: Synthese mit Algorithmenschemata

Wissensbasierte Techniken zur Softwareentwicklung

- **Erzeugte Algorithmen sind korrekt und effizient**
  - Formales theoretisches Fundament sichert Korrektheit
  - Gute algorithmische Struktur liefert Effizienz
  - Nachträgliche Optimierung des schematischen Algorithmus möglich/nötig
  - Mathematische Notation übersetzbar in Programmiersprachen
- **Synthesetechniken sind automatisierbar**
  - Jeder Schritt basiert auf logischer Inferenz
  - Wissen steuert alle Strategien des Algorithmenentwurfs
  - Ähnliche Techniken für Entwurf verschiedener Algorithmenstrukturen
- **Techniken sind praktisch erfolgreich**
  - KIDS erzeugt korrekte Scheduling Algorithmen in wenigen Stunden
  - Erzeugter Lisp Code 2000 mal schneller als existierende ADA Software