

Theoretische Informatik I

Einheit 2.2

Nichtdeterministische Automaten

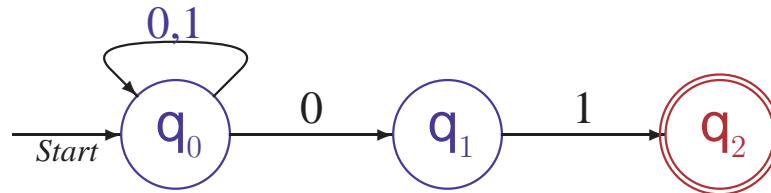


1. Arbeitsweise
2. Akzeptierte Sprache
3. Äquivalenz zu deterministischen Automaten

WAS IST NICHTDETERMISMUS?

- **Verhalten nicht eindeutig bestimmt**

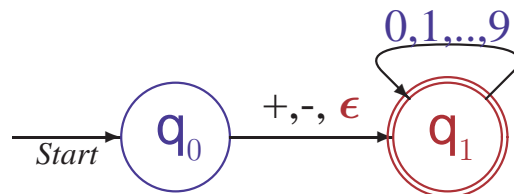
- Automat wählt Folgezustand aus mehreren Möglichkeiten



- Automat erkennt Strings, die mit 01 enden
- Eine 0 kann das erste Symbol des Endes 01 sein ... oder auch nicht

- **Spontane Übergänge zwischen Zuständen**

- Automat geht ohne Eingabe in anderen Zustand über (**ϵ -Übergang**)



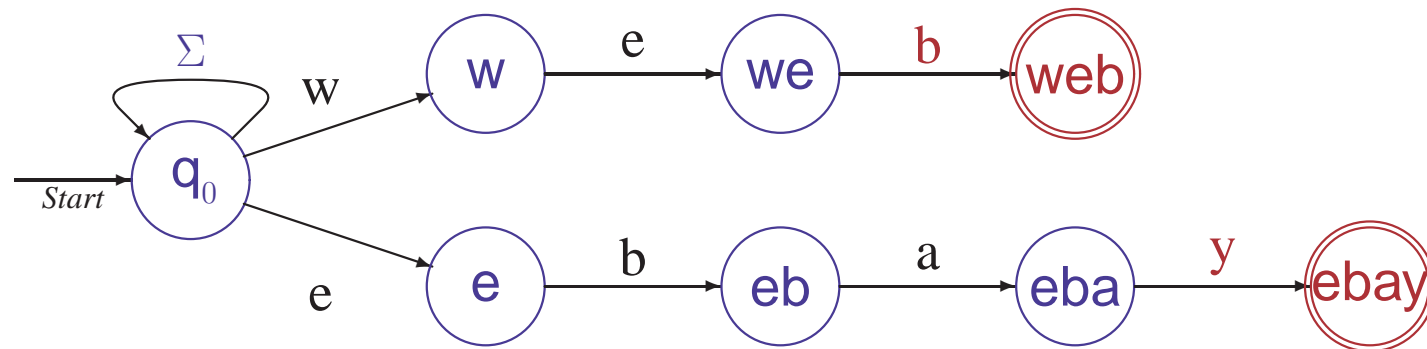
- Automat erkennt ganze Zahlen mit und ohne Vorzeichen

- **Hilfreiches Modell für Entwurfsphase**

- Elegantere Beschreibungsform, leichter als korrekt nachzuweisen
- **Begrenzte physikalische Realisierung** durch Parallelrechner möglich

NICHTDETERMINISTISCHE AUTOMATEN – WOZU?

- **Elegante Form der Textsuche in Dokumenten**
 - Viele verschiedene Wörter in großen Textsammlungen (Internet)
 - Leichte Beschreibung der Suchanfrage
 - Deterministisches Erkennungsverfahren mühsam zu beschreiben
- **Idee: Simultane Verarbeitung von Alternativen**
 - z.B. Suche nach den Wörtern *web* und *ebay* am Ende eines Wortes



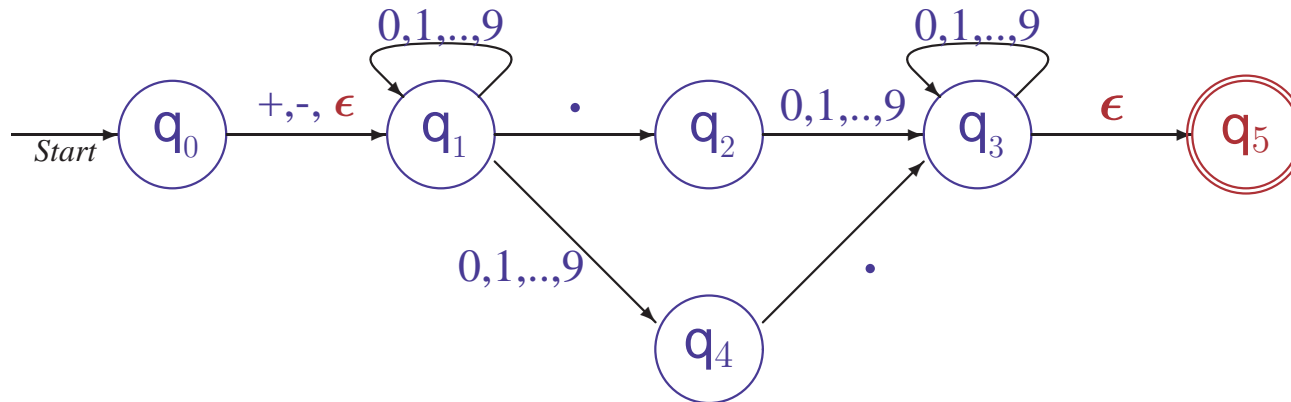
- Ein w könnte der Anfang von *web* sein
- Ein e könnte der Anfang von *ebay* sein
- Aber vor den Wörtern könnte noch etwas anderes stehen

Nichtdeterminismus $\hat{=}$ verfolge alle Möglichkeiten simultan

ϵ -ÜBERGÄNGE – VERARBEITUNG OPTIONALER EINGABEN

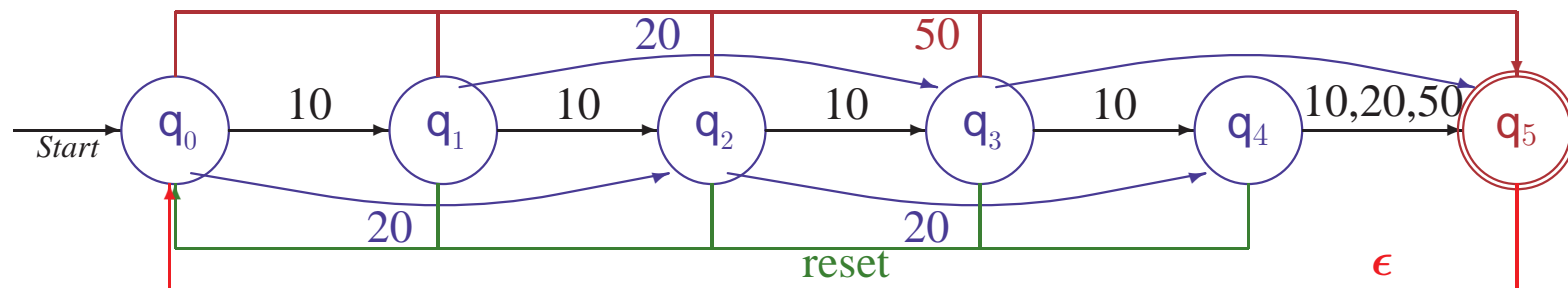
• **Erkenne Dezimalzahlen im Programmcode**

- Zwei Zeichenreihen von Ziffern getrennt durch Dezimalpunkt
- Eine der beiden Zeichenreihen darf leer sein, aber nicht beide
- Optionales Vorzeichen + oder -

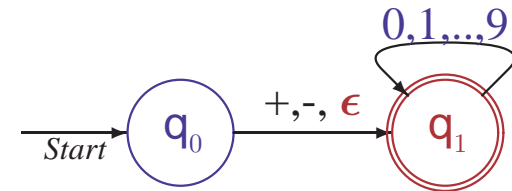
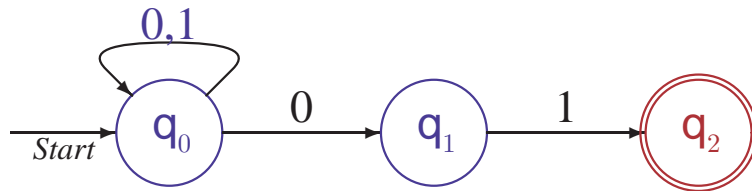


• **50c Kaffeeautomat**

- Akzeptiert 10,20,50c, mit Reset-Taste und **automatischer Rücksetzung**



NICHTDETERMINISTISCHE AUTOMATEN – PRÄZISIERT



Ein **ϵ -NEA** (**nichtdeterministischer endlicher Automat mit ϵ -Übergängen**) ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

- Q nichtleere endliche **Zustandsmenge**
- Σ (endliches) **Eingabealphabet** mit $\epsilon \notin \Sigma$
- $\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ **Zustandsübergangsfunktion** *
- $q_0 \in Q$ **Startzustand**
- $F \subseteq Q$ Menge von **akzeptierenden** (End-) **Zuständen**

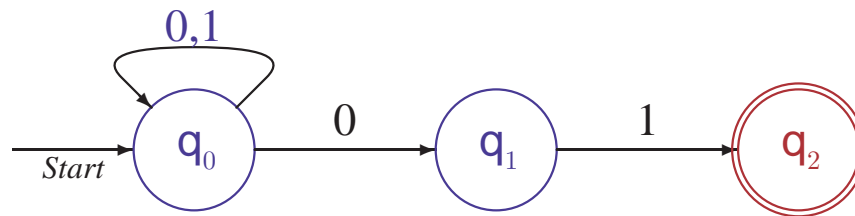
Ein **NEA** ist ein nichtdet. endlicher Automat ohne ϵ -Übergänge

* $\mathcal{P}(Q) = \{S \mid S \subseteq Q\}$ (**Potenzmenge** von Q)

Bei ϵ -NEAs ist $\delta(q', a)$ ist eine (möglicherweise leere) Menge von Zuständen

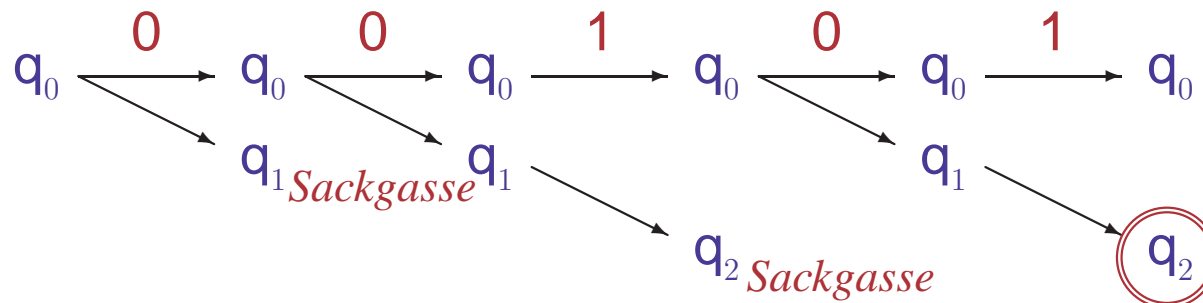
ARBEITSWEISE VON NEAs

Erkenne Strings, die mit 01 enden



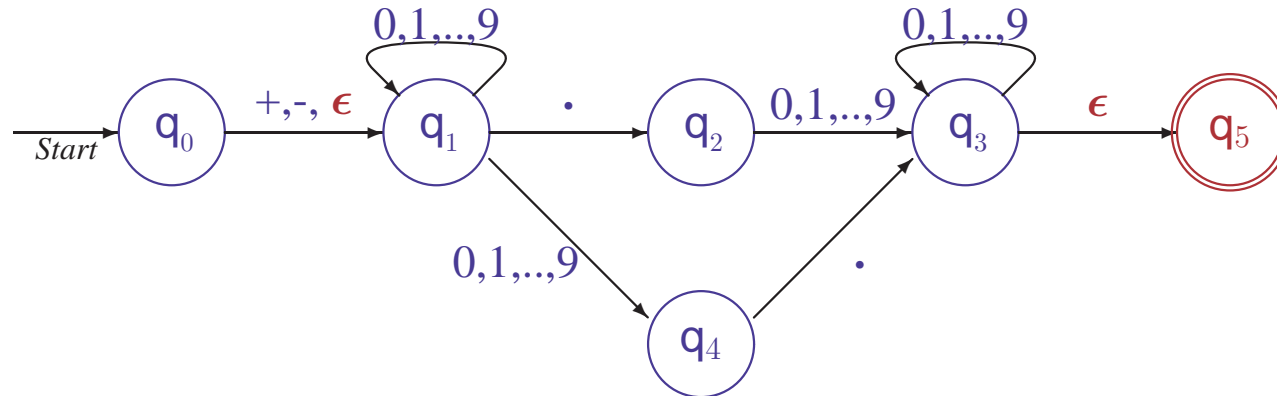
- (1) Jedes Teilwort kann in q_0 bleiben
- (2) Ein Teilwort muss mit 0 enden, um nach q_1 zu führen
- (3) Ein Teilwort muss mit 01 enden, um nach q_2 zu führen
- (4) In q_2 muss das Wort abgearbeitet sein

Beispiel: Abarbeitung von 00101



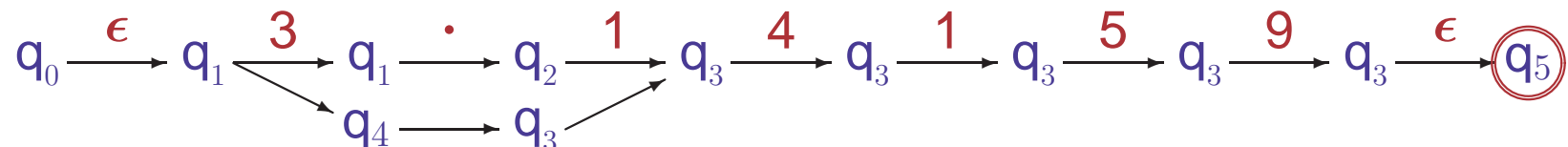
Ein Abarbeitungsweg führt zu einem akzeptierenden Zustand

ARBEITSWEISE VON NEAS MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN



- (1) Die Teilwörter $+$, $-$, und ϵ führen nach q_1
- (2) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+$ mit $v \in \{+, -, \epsilon\}$ führen nach q_1 oder q_4
- (3) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^+.$ führen nach q_2 oder q_3
- (4) Teilwörter der Form $v\{0..9\}^*.\{0..9\}^+$ führen nach q_3
- (5) Wörter die nach q_3 führen, führen auch zum Endzustand q_5

Beispiel: Abarbeitung von 3.14159



Ein Abarbeitungsweg mit ϵ -Übergängen führt zu einem Endzustand

ARBEITSWEISE VON ϵ -NEAS – PRÄZISIERT

- **Beschreibe ϵ -Hülle eines Zustands q**

- Die von q mit ϵ -Übergängen erreichbaren Zustände
- Iterative Definition: Kleinste Menge mit der Eigenschaft
 $q \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$ und $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q) \wedge r \in \delta(p, \epsilon) \Rightarrow r \in \epsilon\text{-Hülle}(q)$

- **Erweiterte Überföhrungsfunktion $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$**

- Aufsammeln **aller** bei der Abarbeitung erreichbaren Zustände einschließlich derjenigen, die ohne Eingabe erreicht werden
- Induktive Definition (kaskadisches Aufsammeln von Zuständen)

$$\hat{\delta}(q, w) = \begin{cases} \epsilon\text{-Hülle}(q) & \text{falls } w = \epsilon, \\ \bigcup_{q' \in \hat{\delta}(q, v)} \bigcup_{q'' \in \delta(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') & \text{falls } w = v a \ (a \in \Sigma) \end{cases}^*$$

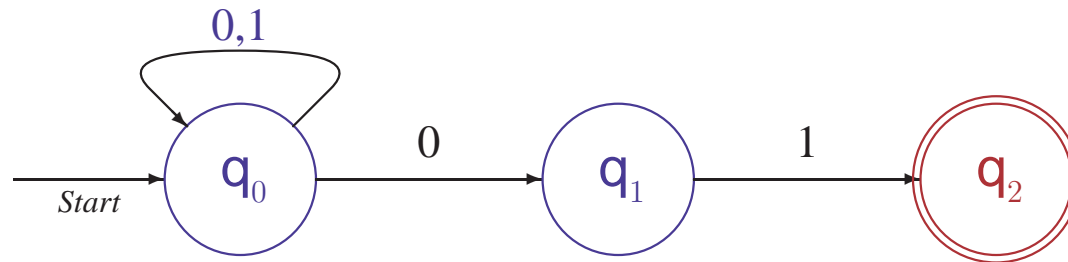
* d.h. $p \in \hat{\delta}(q, w)$ gdw. es gibt ein $q' \in \hat{\delta}(q, v)$ und $q'' \in \delta(q', a)$ so dass $p \in \epsilon\text{-Hülle}(q'')$

- **Von A akzeptierte Sprache**

- Menge der Eingaben w , für die $\hat{\delta}(q_0, w)$ einen Endzustand enthält

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION $\hat{\delta}$ (OHNE ϵ -ÜBERGÄNGE)



• Abarbeitung von 00101

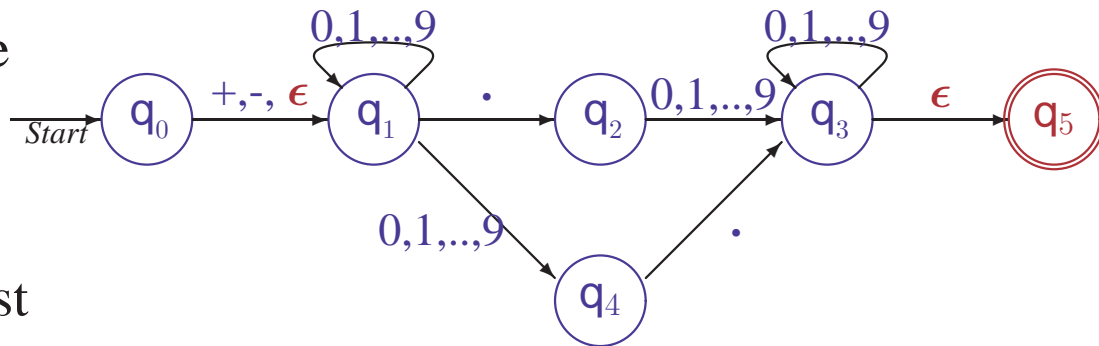
- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 001) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 0010) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_2, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 00101) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_0\} \cup \{q_2\} = \{q_0, q_2\}$

- 00101 wird akzeptiert da $\hat{\delta}(q_0, 00101) \cap F = \{q_2\}$

BESTIMMUNG DER ϵ -HÜLLE

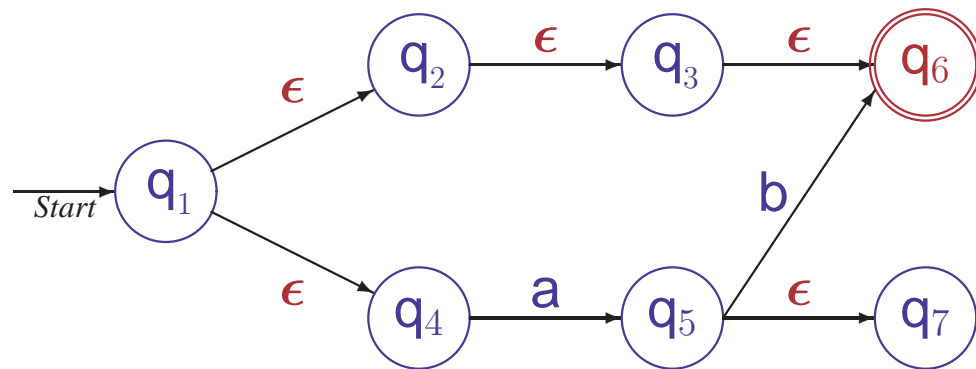
• Dezimalautomat

- Nur zwei ϵ -Übergänge
- ϵ -Hülle(q_0) = $\{q_0, q_1\}$
- ϵ -Hülle(q_3) = $\{q_3, q_5\}$
- ϵ -Hülle(q_i) = $\{q_i\}$ sonst

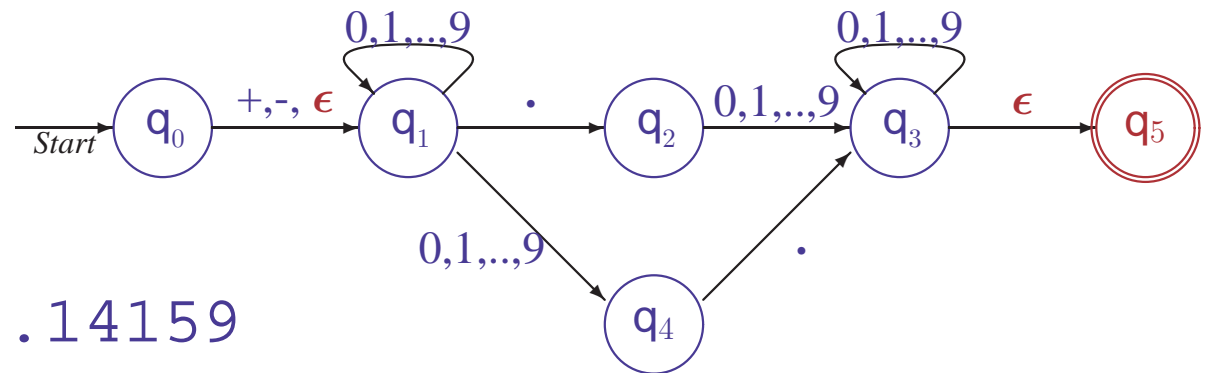


• Viele ϵ -Übergänge

- ϵ -Hülle(q_1) = $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_6\}$
- ϵ -Hülle(q_2) = $\{q_2, q_3, q_6\}$
- ϵ -Hülle(q_3) = $\{q_3, q_6\}$
- ϵ -Hülle(q_4) = $\{q_4\}$
- ϵ -Hülle(q_5) = $\{q_5, q_7\}$
- ϵ -Hülle(q_6) = $\{q_6\}$
- ϵ -Hülle(q_7) = $\{q_7\}$



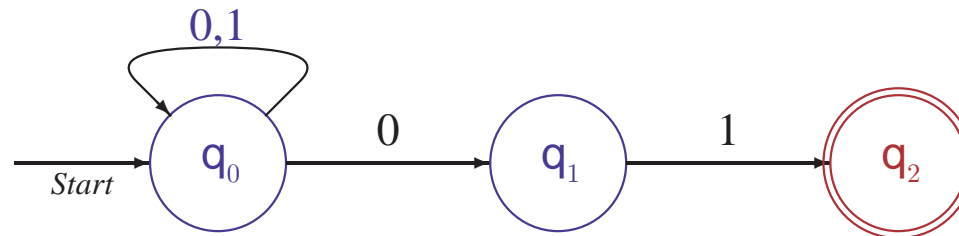
ÜBERFÜHRUNGSFUNKTION $\hat{\delta}$ (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)



Abarbeitung von 3.14159

- $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \{q_0, q_1\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3): \delta(q_0, 3) \cup \delta(q_1, 3) = \emptyset \cup \{q_1, q_4\} = \{q_1, q_4\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3) = \epsilon\text{-Hülle}(q_1) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_4) = \{q_1\} \cup \{q_4\} = \{q_1, q_4\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.): \delta(q_1, .) \cup \delta(q_4, .) = \{q_2\} \cup \{q_3\} = \{q_2, q_3\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3.) = \epsilon\text{-Hülle}(q_2) \cup \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_2\} \cup \{q_3, q_5\} = \{q_2, q_3, q_5\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.1): \delta(q_2, 1) \cup \delta(q_3, 1) \cup \delta(q_5, 1) = \{q_3\} \cup \{q_3\} \cup \emptyset = \{q_3\}$
 $\hat{\delta}(q_0, 3.1) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- $\hat{\delta}(q_0, 3.14) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$
- ⋮
- $\hat{\delta}(q_0, 3.14159) = \epsilon\text{-Hülle}(q_3) = \{q_3, q_5\}$

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (OHNE ϵ -ÜBERGÄNGE)



$$L(A) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ endet mit } 01\}$$

- **Zeige durch simultane Induktion** für alle $w \in \{0, 1\}^*$

a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 0 endet

c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 01 endet

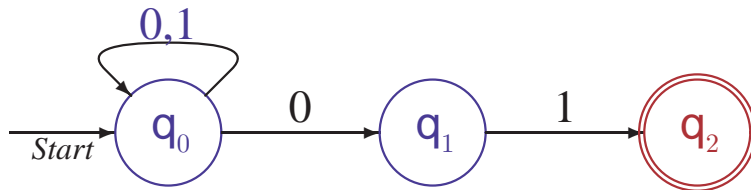
Dann folgt $w \in L(A) \Leftrightarrow \hat{\delta}(q_0, w) \cap \{q_2\} \neq \emptyset \Leftrightarrow w$ endet mit 01

- **Induktionsanfang** $w = \epsilon$

– Per Definition ist $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \{q_0\}$. Also gilt Aussage a)

– w endet weder mit 0 noch mit 01. Aussagen b) und c) gelten trivialerweise

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE II



- a) $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$
- b) $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 0 endet
- c) $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$ genau dann, wenn w mit 01 endet

• Induktionsschritt: $w = va$ für $v \in \{0, 1\}^*$, $a \in \{0, 1\}$

– Die Aussagen a), b), und c) seien für v gültig

a) Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_0 \in \delta(q_0, a)$ für $a \in \{0, 1\}$ folgt $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

b) Sei $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$. Wegen $q_1 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q=q_0 \wedge a=0$ muss w mit 0 enden

Wenn umgekehrt w mit 0 endet, dann ist $a=0$.

Wegen $q_0 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ und $q_1 \in \delta(q_0, a)$ folgt $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

c) Sei $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$. Wegen $q_2 \in \delta(q, a) \Leftrightarrow q=q_1 \wedge a=1$ muss w mit 1 enden und $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ gelten. Wegen b) für v endet v mit 0, also w mit 01

Wenn umgekehrt w mit 01 endet, dann ist $a=1$ und v endet mit 0.

Wegen $q_1 \in \hat{\delta}(q_0, v)$ nach b) und $q_2 \in \delta(q_1, a)$ folgt $q_2 \in \hat{\delta}(q_0, w)$

ARBEITSWEISE VON ϵ -NEAS – ALTERNATIVE BESCHREIBUNG MIT KONFIGURATIONSÜBERGÄNGEN

- **Definiere Konfigurationen**

- Formal dargestellt als Tupel $K = (q, w) \in Q \times \Sigma^*$

- **Definiere Konfigurationsübergangsrelation \vdash^***

- Wechsel zwischen Konfigurationen durch Abarbeitung von Wörtern

- $(q, aw) \vdash (p, w)$, falls $p \in \delta(q, a)$

- $(q, w) \vdash (p, w)$, falls $p \in \delta(q, \epsilon)$

- $K_1 \vdash^* K_2$, falls $K_1 = K_2$ oder

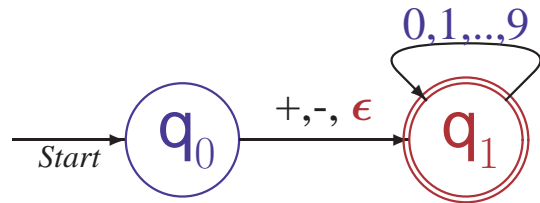
- es gibt eine Konfiguration K mit $K_1 \vdash K$ und $K \vdash^* K_2$

- **Akzeptierte Sprache**

- Menge der Eingaben, für die \vdash^* zu akzeptierenden Zustand führt

$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists p \in F. (q_0, w) \vdash^* (p, \epsilon)\}$$

NACHWEIS DER ERKANNTEN SPRACHE (MIT ϵ -ÜBERGÄNGEN)



$$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \exists u \in \{0, \dots, 9\}^*. \\ w = u \vee w = +u \vee w = -u\}$$

• **Zeige** $(q_1, wv) \vdash^* (q_1, v) \Leftrightarrow w \in \{0, \dots, 9\}^*$ für alle $w, v \in \Sigma^*$

• **Basisfall** $w = \epsilon$:

– Per Definition gilt $(q_1, v) \vdash^* (q_1, v)$ und $\epsilon \in \{0, \dots, 9\}^*$ ✓

• **Schrittfall** $w = ua$ für ein $u \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$:

\Rightarrow : Es gelte $(q_1, wv) \vdash^* (q_1, v)$.

Dann gilt $(q_1, uav) \vdash^* (p, av) \vdash (q_1, v)$ für einen Zustand p .

Es folgt $p = q_1$, $a \in \{0, \dots, 9\}$ und per Induktion $w \in \{0, \dots, 9\}^*$ ✓

\Leftarrow : Es sei $w \in \{0, \dots, 9\}^*$. Dann ist $u \in \{0, \dots, 9\}^*$ und $a \in \{0, \dots, 9\}$.

Mit der Induktionsannahme folgt $(q_1, uav) \vdash^* (q_1, av) \vdash (q_1, v)$ ✓

• **Es folgt**

$$w \in L(A) \Leftrightarrow (q_0, w) \vdash^* (q_1, \epsilon)$$

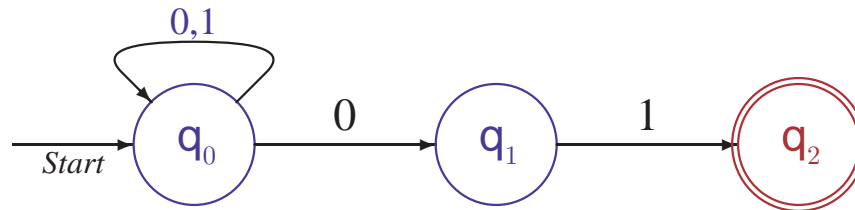
$$\Leftrightarrow \exists u \in \Sigma^*. w \in \{u, +u, -u\}. (q_0, w) \vdash (q_1, u) \vdash^* (q_1, \epsilon)$$

$$\Leftrightarrow \exists u \in \{0, \dots, 9\}^*. w = u \vee w = +u \vee w = -u \Leftrightarrow w \in L$$

BEZIEHUNG ZU DETERMINISTISCHEN AUTOMATEN

- **Nichtdeterministische Automaten sind flexibler**
 - Man muss sich nicht auf eine genaue Verarbeitungsfolge festlegen
 - Man kann optionale Eingaben elegant verarbeiten
- **DEAs sind genauso ausdrucksstark wie ϵ -NEAs**
 - Man kann Mengen von ϵ -NEA-Zuständen als DEA Zustände codieren
 - Man kann mengenwertige Zustandsüberföhrungsfunktionen codieren
- **(Potenzmengen- oder) Teilmengenkonstruktion**
 - Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat
 - Konstruiere äquivalenten DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ mit
 - $Q_D = \mathcal{P}(Q_N)$
 - $q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$ (= $\{q_0\}$ bei NEAs)
 - $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$
 - $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}_N(q, a) = \{p \mid \exists q \in S. p \in \hat{\delta}_N(q, a)\}$ (erfaßt ϵ -Hülle)
 - Dann gilt $L(A_D) = L(A_N)$
 - Konstruktion benötigt $2^{|Q_N|}$ **Zustände** (Optimierung möglich)

TEILMENGENKONSTRUKTION AM BEISPIEL



Konstruierter deterministischer Automat

$$Q_D = \mathcal{P}(\{q_0, q_1, q_2\})$$

$$q_D = \epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0) = \{q_0\}$$

$$F_D = \{S \subseteq \{q_0, q_1, q_2\} \mid q_2 \in S\}$$

	0	1
\emptyset	\emptyset	\emptyset
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_1\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
$* \{q_2\}$	\emptyset	\emptyset
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$* \{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$* \{q_1, q_2\}$	\emptyset	$\{q_2\}$
$* \{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$

Viele \u00berfl\u00fcssige Zust\u00e4nde (nur drei von $\{q_0\}$ erreichbar)

- **Optimierung: $Q_D \hat{=}$ erreichbare Zustände**

- Sei $A_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N)$ ein nichtdeterministischer Automat
- Konstruiere Zustandsmenge Q_D iterativ gleichzeitig mit δ_D
- Start: $Q_0 := \{q_D\} = \{\epsilon\text{-Hülle}(q_0)\}$
- Schritt: $Q_{i+1} := Q_i \cup \{\delta_D(S, a) \mid S \in Q_i, a \in \Sigma\}$

Dabei konstruiere die nötigen Werte $\delta_D(S, a) = \bigcup_{q \in S} \hat{\delta}_N(q, a)$

- Abschluss: Wenn $Q_{i+1} = Q_i$, dann halte an und setze $Q_D := Q_i$
- Setze $q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0)$ und $F_D = \{S \in Q_D \mid S \cap F_N \neq \emptyset\}$
- DEA $A_D = (Q_D, \Sigma, \delta_D, q_D, F_D)$ enthält keine überflüssigen Zustände
- **ϵ -NEAs und DEAs akzeptieren dieselben Sprachen**
 - Jeder DEA ist als “eindeutiger” ϵ -NEA beschreibbar

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION: KORREKTHEIT

Für den konstruierten DEA gilt $L(A_D) = L(A_N)$

Zeige: $\hat{\delta}_D(q_D, w) = \hat{\delta}_N(q_0, w)$ für alle $w \in \Sigma^*$

Beweis durch strukturelle Induktion über den Aufbau der Wörter aus Σ^*

– **Basisfall:** Sei $w = \epsilon$:

$$\hat{\delta}_D(q_D, \epsilon) = q_D = \epsilon\text{-Hülle}(q_0) = \hat{\delta}_N(q_0, \epsilon)$$

– **Induktionsschritt:** Sei $w = va$ für ein $v \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$:

– **Induktionsannahme:** Es gelte $\hat{\delta}_D(q_D, v) = \hat{\delta}_N(q_0, v)$

Dann gilt $\hat{\delta}_D(q_D, w)$

$$= \delta_D(\hat{\delta}_D(q_D, v), a) \quad \text{(Definition } \hat{\delta}_D)$$

$$= \delta_D(\hat{\delta}_N(q_0, v), a) \quad \text{(Induktionsannahme)}$$

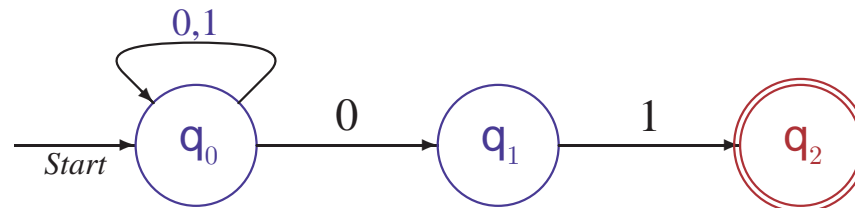
$$= \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_N(q_0, v)} \delta_N(q', a) \quad \text{(Konstruktion von } \delta_D)$$

$$= \bigcup_{q' \in \hat{\delta}_N(q_0, v)} \bigcup_{q'' \in \delta_N(q', a)} \epsilon\text{-Hülle}(q'') \quad \text{(Definition } \hat{\delta}_N)$$

$$= \hat{\delta}_N(q_0, w) \quad \text{(Definition } \hat{\delta}_N)$$

Es folgt $L(A_D) = \{w \mid \hat{\delta}_D(q_D, w) \in F_D\} = \{w \mid \hat{\delta}_N(q_0, w) \cap F_N \neq \emptyset\} = L(A_N)$

OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR NEAS



- **Konstruktion von Zustandsmengen und (reduzierter) Überföhrungsfunktion**

	0	1
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
* $\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

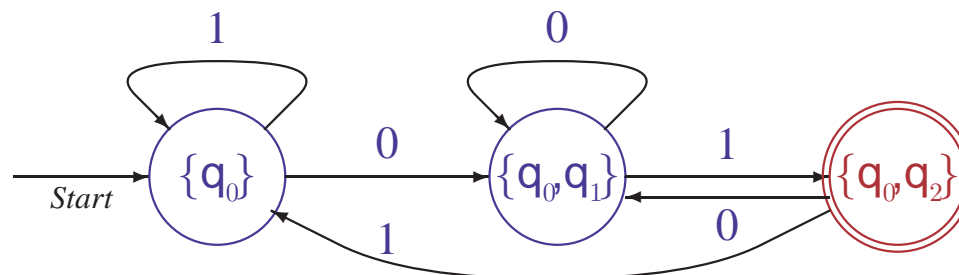
$$Q_0 := \{\{q_0\}\}$$

$$Q_1 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}\}$$

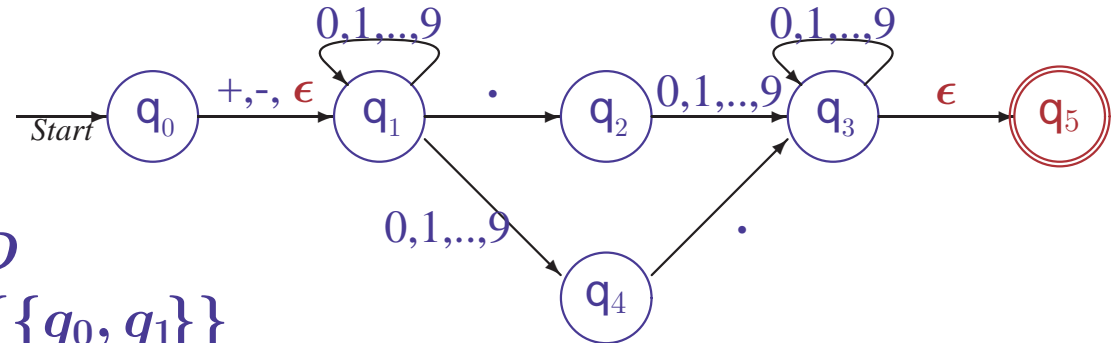
$$Q_2 := \{\{q_0\}, \{q_0, q_1\}, \{q_0, q_2\}\}$$

$$Q_3 = Q_2, \text{ also } Q_D = Q_2,$$

- **Resultierender deterministischer Automat**



OPTIMIERTE TEILMENGENKONSTRUKTION FÜR ϵ -NEAS



• Konstruiere Q_D und δ_D

$$Q_0 = \{q_D\} = \{\epsilon\text{-H\u00fclle}(q_0)\} = \{\{q_0, q_1\}\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, +) = \{q_1\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, -) = \{q_1\}$$

$$- \delta_D(\{q_0, q_1\}, 0) = \{q_1, q_4\}, \dots, \delta_D(\{q_0, q_1\}, 9) = \{q_1, q_4\}, \quad \delta_D(\{q_0, q_1\}, \cdot) = \{q_2\}$$

$$Q_1 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\} \}$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, +) = \delta_D(\{q_2\}, +) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, +) = \emptyset, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, 0) = \delta_D(\{q_1, q_4\}, 0) = \{q_1, q_4\} \quad \delta_D(\{q_2\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\{q_1\}, \cdot) = \{q_2\}, \quad \delta_D(\{q_2\}, \cdot) = \emptyset \quad \delta_D(\{q_1, q_4\}, \cdot) = \{q_2, q_3, q_5\}$$

$$Q_2 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \}$$

$$- \delta_D(\emptyset, +) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, +) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, +) = \emptyset, \dots$$

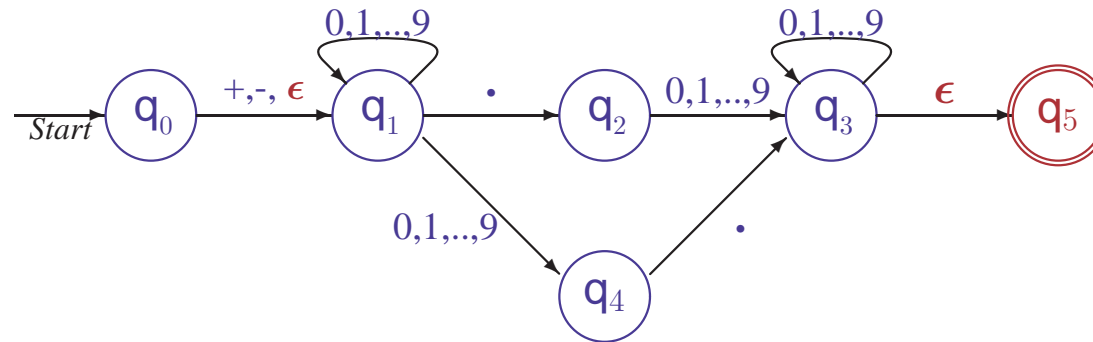
$$- \delta_D(\emptyset, 0) = \emptyset, \quad \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, 0) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, 0) = \{q_3, q_5\}, \dots$$

$$- \delta_D(\emptyset, \cdot) = \delta_D(\{q_2, q_3, q_5\}, \cdot) = \delta_D(\{q_3, q_5\}, \cdot) = \emptyset$$

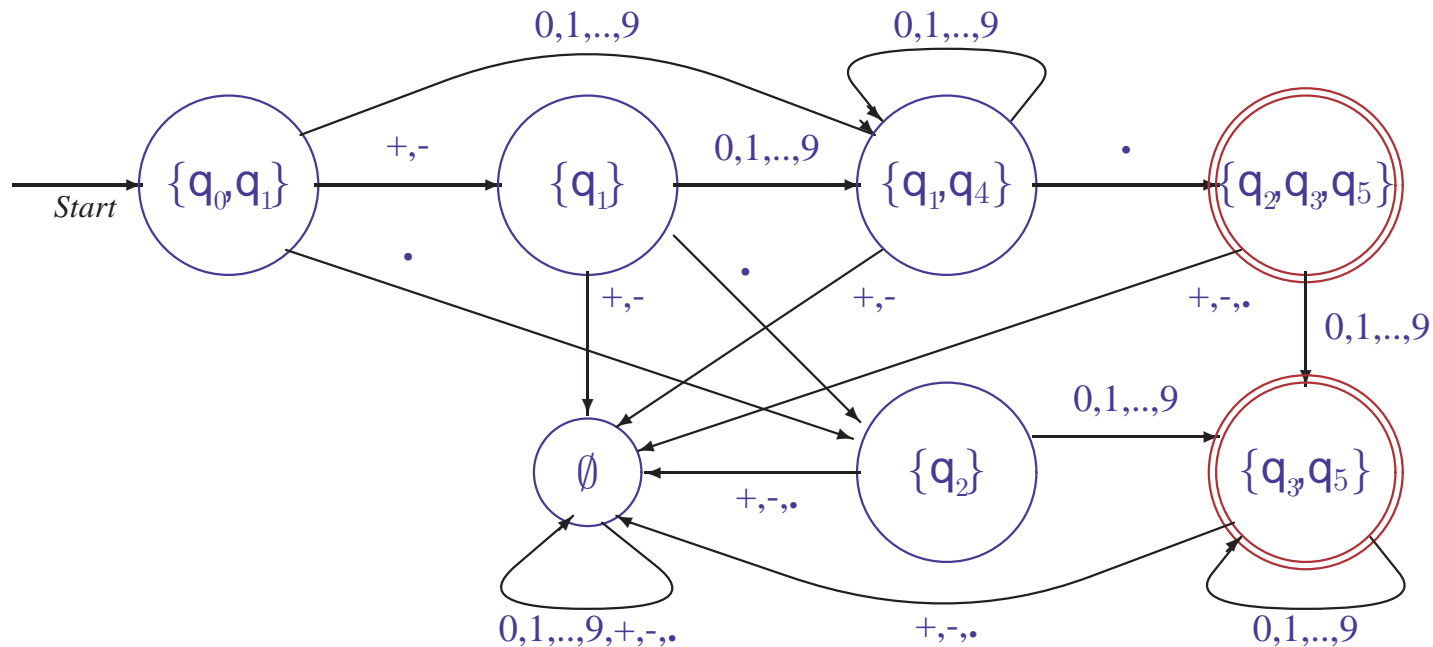
$$Q_3 = \{ \{q_0, q_1\} \{q_1\}, \{q_1, q_4\}, \{q_2\}, \emptyset, \{q_3, q_5\}, \{q_2, q_3, q_5\} \} = Q_2 =: Q_D$$

ERZEUGTER DEA FÜR DEZIMALZÄHLERKENNUNG

Ursprünglicher ϵ -NEA

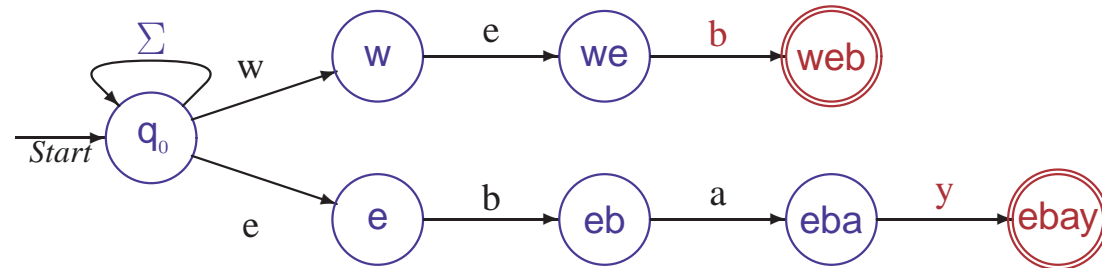


Generierter DEA

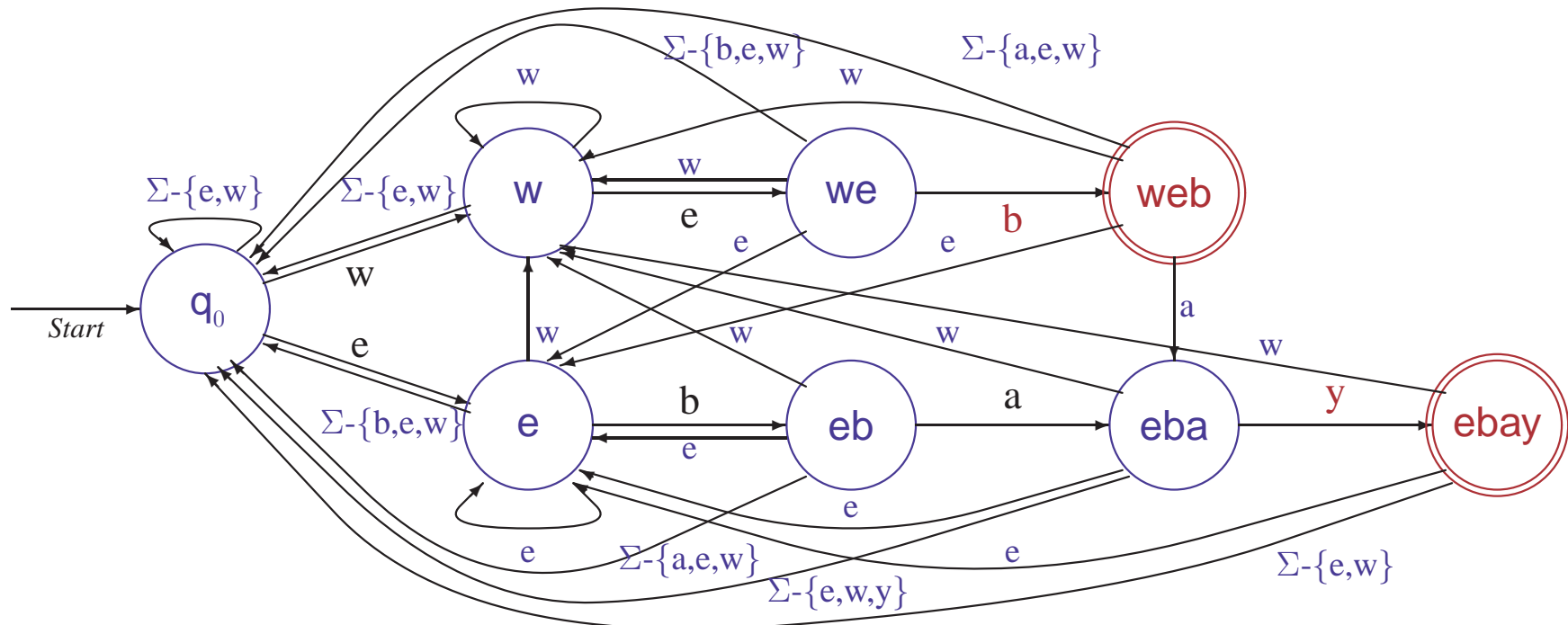


DETERMINISTISCHE AUTOMATEN FÜR TEXTANALYSE

Ursprünglicher ϵ -NEA

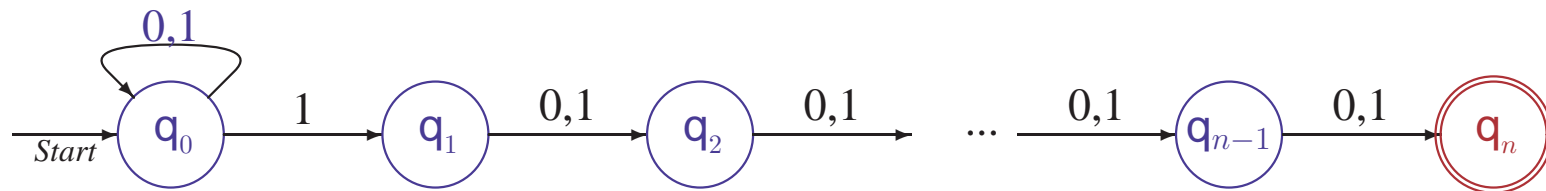


Generierter DEA



ANALYSE DER OPTIMIERTEN TEILMENGENKONSTRUKTION

- A_D kann so klein sein wie A_N
 - Nur wenige Teilmengen von Q_N werden wirklich erreicht
- A_D kann exponentiell größer werden



– $L(A_N) = \{w \in \{0, 1\}^* \mid \text{das } n\text{-te Zeichen vor dem Ende ist eine } 1\}$

– **Jeder DEA A für $L(A_N)$ benötigt mindestens 2^n Zustände**

– **Beweis:** Es gibt 2^n Wörter der Länge n in $\{0, 1\}^*$

Hat A weniger als 2^n Zustände, so gibt es $w = a_1..a_n$ und $v = b_1..b_n$

mit $w \neq v$ und $\hat{\delta}_A(q_0, w) = \hat{\delta}_A(q_0, v)$ **(Schubfachprinzip)**

Sei $a_i \neq b_i$. Für $q = \delta_A(q_0, w0^{i-1}) = \delta_A(q_0, v0^{i-1})$ folgt $q \in F$ und $q \notin F$

ENDLICHE AUTOMATEN – ZUSAMMENFASSUNG

- **Deterministische Endliche Automaten (DEA)**

- Endliche Menge von **Zuständen**, endliche Menge von **Eingabesymbolen**
- **Ein fester Startzustand**, null oder mehr **akzeptierende Zustände**
- **Überföhrungsfunktion** bestimmt Änderung des Zustands bei Abarbeitung der Eingabe
- **Erkannte Sprache**: Eingaben, deren Abarbeitung in einem akzeptierenden Zustand endet

- **Automaten mit Ausgabe (Mealy/Moore-Automat)**

- Wie DEA, mit zusätzlicher **Ausgabefunktion**
- Gegenseitige Simulation möglich

- **Nichtdeterministische Automaten (ϵ -NEA / NEA)**

- Wie DEA, aber mit **mengenwertiger Überföhrungsfunktion** und **Zustandsüberföhrung bei leerer Eingabe**
- Durch **Teilmengenkonstruktion** in äquivalenten DEA transformierbar