Theoretische Informatik I

Einheit 2.3

Reguläre Ausdrücke

1. Anwendungen
2. Syntax und Semantik
3. Vereinfachungsregeln
4. Beziehung zu endlichen Automaten

Eine algebraische Beschreibung für Sprachen

- **Automaten beschreiben Abarbeitung von Sprachen**
  - **Operationale Semantik**: Symbole führen zu Zustandsänderungen
  - Bestimmte Wörter bzw. Symbolketten werden durch Zustände akzeptiert
  - Für Automaten ist Sprache $\hat{=}$ Menge der akzeptierten Wörter
- **Wie beschreibt man Eigenschaften von Wörtern?**
  - **Deklarative Semantik**: äußere Form von Zeichenreihen einer Sprache

    z.B. *Wörter haben eine führende Null, dann beliebig viele Einsen*
  - Anwendungen brauchen präzise Beschreibungssprache für Wörter
    - Grundeinheiten von Programmiersprachen, Suchmuster für Browser, …
- **Reguläre Ausdrücke als formale Syntax**
  - Kurze, prägnante Beschreibung des Aufbaus der Wörter einer Sprache

    z.B. $\mathtt{01}^*$: “Zuerst eine Null, dann beliebig viele Einsen”

Anwendung: Textsuche

- **Suche nach Mustern in Texten**
  - Suche ob/wo/wie oft eine bestimmte Zeichenkette im Text erscheint
  - Textmuster kann Platzhalter enthalten
- **Beschreibe Textmuster durch reguläre Ausdrücke**
  - Zahl: Ziffernfolge dann evtl. Punkt und nichtleere Ziffernfolge
  - Formaler Ausdruck:

    $\texttt{(0+1+..+9)}^*\texttt{(}\epsilon\texttt{+(.(0+1+..+9)(0+1+..+9)}^*\texttt{))}$
- **Vielfältige Anwendungen**
  - Google Suche nach einfachen Texten
  - Erweiterte Google Suche nach Textmustern
  - Unix Kommando grep: suche nach Textmustern in Dateien
  - Programmiersprachen wie PERL und AWK
  - Textsuche und Textersetzung in Emacs
  - Lexikalische Analyse in Compilern

Anwendung: Lexikalische Analyse

Wichtigster Grundbestandteil von Compilern

- **Reguläre Ausdrücke beschreiben Token**
  - Logische Grundeinheiten von Programmiersprachen
  - z.B. Schlüsselwörter, Bezeichner, Dezimalzahlen, ...

- **"Lexer" transformieren reguläre Ausdrücke in Analyseprogramme**
  - Analyse kann die Token der Programmiersprache identifizieren
  - Zugrundeliegende Technik:
    Umwandlung regulärer Ausdrücke in DEAs

Reguläre Ausdrücke präzisiert (Syntax)

- **Syntax: Terme über** $\Sigma \cup \{\emptyset, \epsilon, +, \circ, {}^*, (,)\}$

  Reguläre Ausdrücke sind induktiv wie folgt definiert

  – E = a ist ein regulärer Ausdruck für jedes $a \in \Sigma$

  – $E = \emptyset$ und $F = \epsilon$ sind reguläre Ausdrücke

  – Sind E und F reguläre Ausdrücke, dann sind auch

  $\boldsymbol{E}\circ\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{E}^*$, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{F}$ und $(\boldsymbol{E})$ sind reguläre Ausdrücke

  Mehr Ausdrücke möglich, aber nicht erforderlich

- **Konventionen zur Vereinfachung**

  – $E\circ F$ wird üblicherweise als $\boldsymbol{EF}$ abgekürzt

  – Definitorische Abkürzungen: $\boldsymbol{E}^+ \equiv EE^*$, $[\boldsymbol{a_1 ... a_n}] \equiv a_1 + ... + a_n$

  – Prioritätsregelungen ermöglichen, überflüssige Klammern wegzulassen

    · * ("Sternoperator") bindet stärker als ∘, und dies stärker als +

    · Verkettung ∘ und Alternative + sind assoziativ

Reguläre Ausdrücke präzisiert (Semantik)

- **Reguläre Ausdrücke beschreiben Sprachen über Σ**
- **Die Sprache $L(E)$ ist induktiv definiert**
  - Für für alle $a \in \Sigma$ ist $L(\mathtt{a}) = \{a\}$ (einelementige Sprache, die nur a enthält)

    $L(\emptyset)$ ist die leere Sprache (üblicherweise geschrieben als $\emptyset$ oder $\{\}$)

    $L(\epsilon) = \{\epsilon\}$ (einelementige Sprache, die nur das leere Wort enthält)
  - $L(E \circ F) = L(E) \circ L(F) = \{v\,w \mid v \in L(E) \wedge w \in L(F)\}$

    $\circ$ steht für die Verkettung (der Wörter) zweier Sprachen
  - $L(E^*) = (L(E))^* = \{w_1 w_2 .. w_n \mid n \in \mathbb{N} \wedge w_i \in L(E)\}$

    * steht für Verkettung beliebig vieler Wörter einer Sprache (Kleene’sche Hülle)
  - $L(E+F) = L(E) \cup L(F) = \{w \in \Sigma^* \mid w \in L(E) \vee w \in L(F)\}$

    $+$ steht für die Vereinigung zweier Sprachen
  - $L((E)) = L(E)$

Sprachen vs. Ausdrücke

- **Sprachen sind Mengen von Wörtern**
  - Abstraktes semantisches Konzept: Ungeordnete Kollektion von Wörtern
  - Beschreibung von Mengen (auf Folie, Tafel,...) benötigt textuelle Notation
  - Notation benutzt Kurzschreibweisen wie $\cup$, $\circ$, $*$ für Mengenoperationen

    ... aber ist selbst nur ein Hilfsmittel zur Kommunikation
- **Reguläre Ausdrücke sind Terme**
  - Eine syntaktische Beschreibungsform, die ein Computer versteht
  - Reguläre Ausdrücke werden zur Beschreibung von Sprachen benutzt

    und sind ähnlich zur Standardnotation von Mengen
- **Reguläre Ausdrücke sind selbst keine Sprachen**
  - Unterscheide Ausdruck E von Sprache des Ausdrucks $L(E)$
  - Man verzichtet auf den Unterschied wenn der Kontext eindeutig ist

Beispiele regulärer Ausdrücke

- $\mathtt{a}^*\mathtt{ba}^*$
  – steht für die Menge aller Wörter über Σ={a,b}, die genau ein b enthalten
  – $L(\mathtt{a}^*\mathtt{ba}^*) = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält genau ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid \#_b(w) = 1\}$
- $\Sigma^*\mathtt{b}\Sigma^*$
  – steht für $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält mindestens ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid \#_b(w) \geq 1\}$
- $\mathtt{a}^*\mathtt{(b+}\epsilon\mathtt{)a}^*$
  – steht für $\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält maximal ein } b\} = \{w \in \Sigma^* \mid \#_b(w) \leq 1\}$
- $\mathtt{a}\emptyset$
  – steht für die leere Sprache, denn die Verkettung einer Sprache mit der leeren Sprache ist immer leer
- $\emptyset^*$
  – steht für die Menge $\{\epsilon\}$, denn die beliebige Verkettung von Wörtern einer Menge enthält immer das leere Wort

Entwicklung regulärer Ausdrücke

Beschreibe Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln

1. Regulärer Ausdruck für die Sprache $\{01\}$

– $\mathtt{0}$ repräsentiert $\{0\}$, $\mathtt{1}$ repräsentiert $\{1\}$

– Also ist $L(\mathtt{01}) = L(\mathtt{0})\circ L(\mathtt{1}) = \{0\}\circ\{1\} = \{01\}$

2. Erzeuge $\{01, 0101, 010101, ..\}$ durch Sternbildung

– $L(\mathtt{(01)}^*) = L(\mathtt{01})^* = \{01\}^* = \{\epsilon, 01, 0101, 010101, \ldots\}$

3. Manche Wörter nicht erfaßt

– Start mit Eins statt Null: $\mathtt{(10)}^*$

– Start und Ende mit Null: $\mathtt{(01)}^*\mathtt{0}$

– Start und Ende mit Eins: $\mathtt{(10)}^*\mathtt{1}$

Vollständiger Ausdruck: $\mathtt{(01)}^* + \mathtt{(10)}^* + \mathtt{(01)}^*\mathtt{0} + \mathtt{(10)}^*\mathtt{1}$

4. Es geht auch kürzer

– Optional 1 am Anfang oder 0 am Ende: $\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+1)(01)}^*\mathtt{(}\epsilon\mathtt{+0)}$

Bestimmung der Semantik von $(\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)$

$$
\begin{aligned}
& L((\epsilon+1)(01)^*(\epsilon+0)) \\
= \;& L((\epsilon+1)) \circ L((01)^*) \circ L((\epsilon+0)) \\
= \;& L(\epsilon) \cup L(1) \circ L((01))^* \circ L(\epsilon) \cup L(0) \\
= \;& \{\epsilon\} \cup \{1\} \circ (L(0) \circ L(1))^* \circ \{\epsilon\} \cup \{0\} \\
= \;& \{\epsilon,1\} \circ \{01\}^* \circ \{\epsilon,0\} \\
= \;& \{\epsilon,1\} \circ \{w \mid \exists n \in \mathbb{N}.\ w = \underbrace{01...01}_{n-mal}\} \circ \{\epsilon,0\} \\
= \;& \{w \mid \exists n \in \mathbb{N}.\ w = \underbrace{01...01}_{n-mal} \lor w = 1\underbrace{01...01}_{n-mal} \\
& \qquad \lor w = \underbrace{01...01}_{n-mal}0 \lor w = 1\underbrace{01...01}_{n-mal}0\,\} \\
= \;& \text{Die Menge aller Wörter, in denen 0 und 1 abwechseln}
\end{aligned}
$$

(Mühsamer Beweis durch Induktion)

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke

Wie zeigt man $\texttt{(01)}^*\texttt{+(10)}^*\texttt{+(01)}^*\texttt{0+(10)}^*\texttt{1} \cong \texttt{(}\epsilon\texttt{+1)(01)}^*\texttt{(}\epsilon\texttt{+0)}$?

- **Definiere Äquivalenz von Ausdrücken**
  - $E \cong F$, falls $L(E) = L(F)$
- **Beweise algebraische Gesetze regulärer Ausdrücke**
  - Liefert Hilfsmittel zur Vereinfachung regulärer Ausdrücke
- **Gesetze für Einheiten und Annihilatoren**
  - $\emptyset + E \cong E \cong E + \emptyset$: $L(\emptyset + E) = L(\emptyset) \cup L(E) = \emptyset \cup L(E) = L(E)$
  - $\epsilon \circ E \cong E \cong E \circ \epsilon$: $L(\epsilon \circ E) = L(\epsilon) \circ L(E) = \{\epsilon\} \circ L(E) = L(E)$
  - $\emptyset \circ E \cong \emptyset \cong E \circ \emptyset$: $L(\emptyset \circ E) = L(\emptyset) \circ L(E) = \emptyset \circ L(E) = \emptyset = L(\emptyset)$
- **Kommutativitätsgesetz für +**
  - $E + F \cong F + E$: $L(E+F) = L(E) \cup L(F) = L(F) \cup L(E) = L(F+E)$
  - Kommutativität von $\circ$ gilt nicht: $= L(\texttt{01}) = \{01\} \neq \{10\} = L(\texttt{10})$

"Rechenregeln" für reguläre Ausdrücke II

- **Gesetze fürAssoziativität von $\circ$ und +**
  - $(E\circ F)\circ G \cong E\circ(F\circ G)$:
    $L((E\circ F)\circ G) = L(E\circ F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F)\circ L(G) = L(E)\circ L(F\circ G) = L(E\circ(F\circ G))$
  - $(E+F)+G \cong E+(F+G)$:
    $L((E+F)+G) = L(E+F)\cup L(G) = L(E)\cup L(F)\cup L(G) = \ldots = L(E+(F+G))$
- **Distributivgesetze**
  - $(E+F)\circ G \cong E\circ G+F\circ G$:
    $$\begin{aligned} L((E+F)\circ G) &= (L(E)\cup L(F))\circ L(G) \\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E)\cup L(F).\exists v\in L(G).w = uv\} \\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E).\exists v\in L(G).w = uv \vee \exists u\in L(F).\exists v\in L(G).w = uv\} \\ &= \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(E).\exists v\in L(G).w = uv\} \cup \{w\in\Sigma^* \mid \exists u\in L(F).\exists v\in L(G).w = uv\} \\ &= L(E)\circ L(G)\cup L(F)\circ L(G) = L(E\circ G+F\circ G) \end{aligned}$$
  - $G\circ(E+F) \cong G\circ E + G\circ F$
- **Idempotenz von +:** $E+E \cong E$
- **Hüllengesetze:** $\emptyset^* \cong \epsilon,\ \ \epsilon^* \cong \epsilon,\ \ (E^*)^* \cong E^*$
  $E^+ \cong E\circ E^* \cong E^*\circ E,\ \ E^* \cong \epsilon + E^+$

Beweismethodik für weitere Äquivalenzen

- **Beispiel: Nachweis von $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$**
  - Sei $w \in L((E+F)^*)$
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E)$ oder $w_i \in L(F)$ für alle i
  - Dann $w = w_1..w_k$ mit $w_i \in L(E^*F^*)$ für alle i (semantisches Argument)
  - Also $w \in L((E^*F^*)^*)$
- **Beweis verwendet keine Information über E und F**
  - Man könnte genauso gut $(\mathtt{a}+\mathtt{b})^* \cong (\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*)^*$ testen
    $(E+F)^* \cong (E^*F^*)^*$ gilt, weil $(\mathtt{a}+\mathtt{b})^* \cong (\mathtt{a}^*\mathtt{b}^*)^*$ gilt
- **Allgemeines Beweisverfahren**
  - E regulärer Ausdruck mit Metavariablen $E_1,..,E_m$ für Sprachen $L_1,..,L_m$
  - Ersetze im Beweis für $E \cong F$ alle Metavariablen durch Symbole $a \in \Sigma$
  - Teste Äquivalenz der konkreten Ausdrücke mit automatischem Prüfverfahren

$\mapsto$ Einheit 2.5

Korrektheitsbeweis: Induktion über Struktur regulärer Ausdrücke

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

Sprachen regulärer Ausdrücke sind endlich erkennbar

Für jeden regulären Ausdruck E gibt es einen ϵ-NEA A mit

– A hat genau einen akzeptierenden Zustand q_f

– Der Startzustand von A ist in keinem $\delta_A(q,a)$ enthalten

– Für alle $a\in\Sigma$ ist $\delta_A(q_f,a) = \emptyset$

– $L(E) = L(A)$

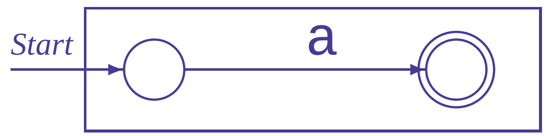
Beweis durch strukturelle Induktion über Aufbau regulärer Ausdrücke

- **Induktionsanfänge**

  – Für E = ϵ wähle A =

  – Für E = $\emptyset$ wähle A =

  – Für E = a wähle A =



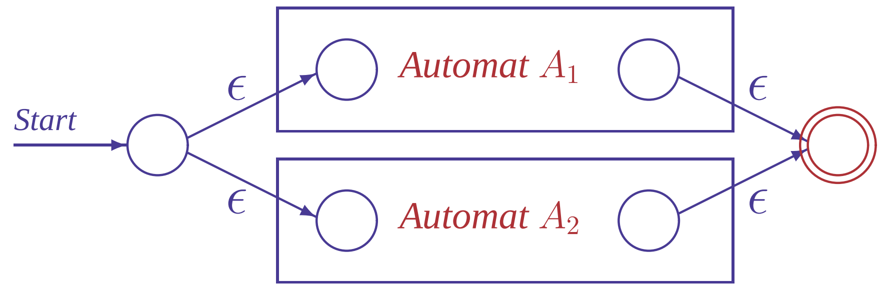
  – **Korrektheit offensichtlich**, da jeweils maximal ein Zustandsübergang

Umwandlung regulärer Ausdrücke in Automaten

- **Induktionsannahme: seien A_1 und A_2 ϵ-NEAs für E_1 und E_2**

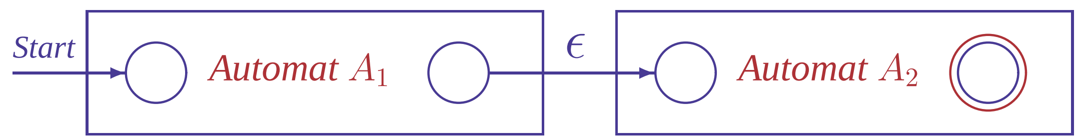
- **Induktionsschritt**

  – Für $E = E_1 + E_2$ wähle $A =$

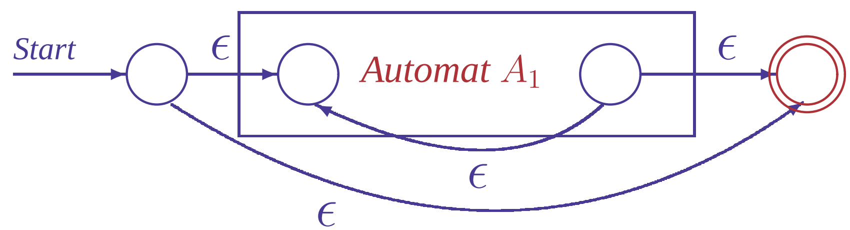


  – Für $E = E_1 \circ E_2$ wähle

$A =$



  – Für $E = E_1^*$ wähle $A =$

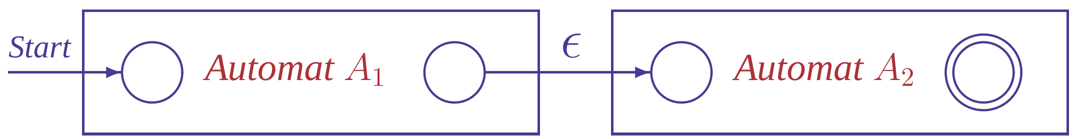


  – Für $E = (E_1)$ wähle $A = A_1$

Korrektheit der Umwandlungen

- **Klammern ändern nichts**
  - Es ist $L(\,(\,E_1\,)\,) = L(E_1) = L(A_1) = L(A)$

- **Verkettung ist Verschaltung von Automaten**



Es gilt $w \in L(E_1 \circ E_2)$

$$\Rightarrow\ w \in L(E_1) \circ L(E_2) = L(A_1) \circ L(A_2)$$
$$\Rightarrow\ \exists u \in L(A_1). \exists v \in L(A_2). w = uv$$
$$\Rightarrow\ \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{f,1} \in \hat{\delta}_1(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}_2(q_{0,2}, v)$$
$$\Rightarrow\ \exists u, v \in \Sigma^*. w = uv \wedge q_{0,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, u) \wedge q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,2}, v) \qquad (q_{0,2} \in \epsilon\text{-Hülle}(q_{f,1}))$$
$$\Rightarrow\ q_{f,2} \in \hat{\delta}(q_{0,1}, w) \qquad (\text{Definition } \hat{\delta})$$
$$\Rightarrow\ w \in L(A)$$

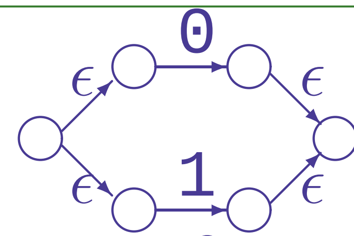
Argument ist umkehrbar, also $w \in L(A) \ \Rightarrow\ w \in L(E_1 \circ E_2)$

- **Sternbildung und Vereinigung ähnlich**

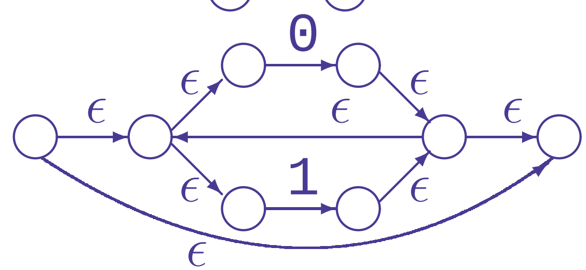
Umwandlung regulärer Ausdrücke am Beispiel

Konstruiere endlichen Automaten für `(0+1)`*`1(0+1)`

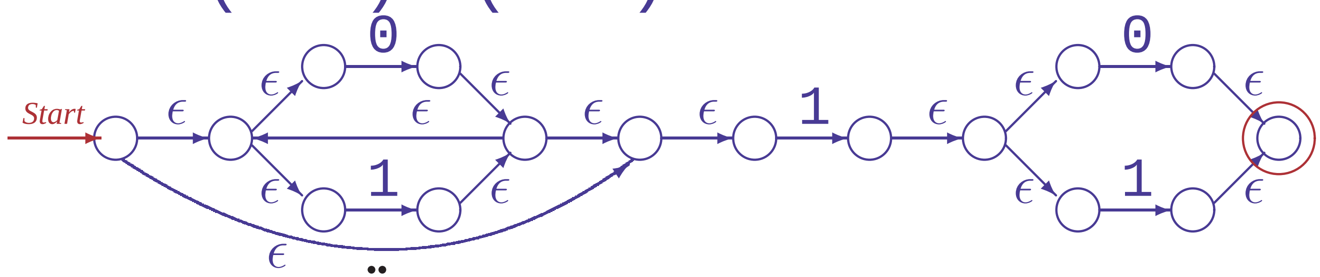
- **Teilautomat für `(0+1)`**



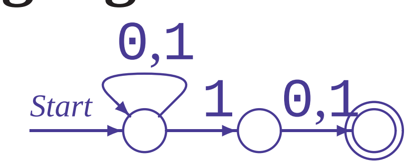
- **Teilautomat für `(0+1)`***



- **Automat für `(0+1)`*`1(0+1)`**



- **Elimination von ϵ-Übergängen**



Umwandlung von (ϵ-)NEAs in reguläre Ausdrücke

- **Ursprünglich: Pfadanalyse im Übergangsdiagramm**
  – Spezialisierung eines allgemeinen Verfahrens für Pfadanalyse in Graphen
  – Definiere reguläre Ausdrücke für Pfade durch Automaten
  – Berechnung Ausdrücke iterativ und kombiniere alle relevanten Ausdrücke
  – Kompliziertes und aufwendiges Verfahren

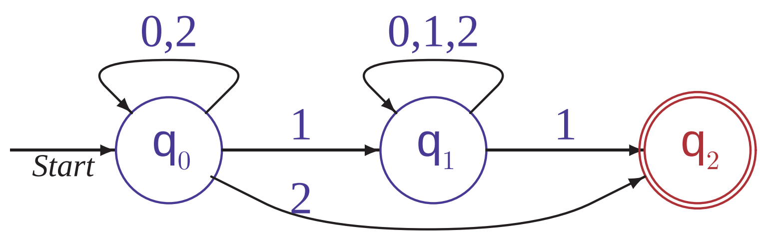
  Mehr dazu im Anhang

- **Effizienterer Zugang: Elimination von Zuständen**
  – Beschreibe Übergänge $q_i \xrightarrow{a\in\Sigma} q_j$ durch reguläre Ausdrücke
  – Beginne mit regulären Ausdrücken für direkte Übergänge
  – Entferne einzelne Zustände und beschreibe die entstehenden Ausdrücke
  – Liefert Ausdrücke für Übergänge zwischen Start- und Endzuständen

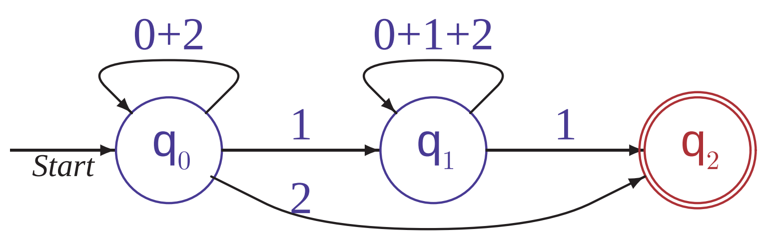
- **Technisches Hilfsmittel: verallgemeinerte NEAs (VNEAs)**
  – NEA, dessen Überführungsfunktion δ auf regulären Ausdrücken arbeitet
  – A akzeptiert w, wenn es einen Pfad $w = v_1..v_m$ von q_0 zu einem $q \in F$ gibt und alle v_i in der Sprache des entsprechenden regulären Ausdrucks liegen
  – Konsistente Formalisierung mühsam und ohne Erkenntnisgewinn

Zustandselimination in VNEAs

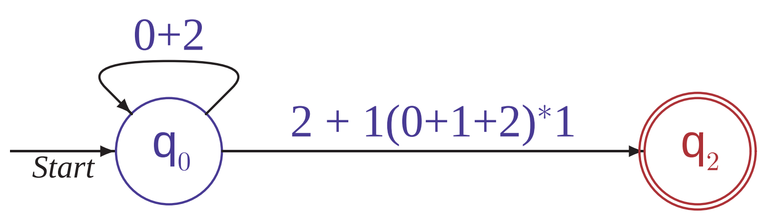
- **Ursprünglicher NEA**



- **Zugehöriger VNEA**

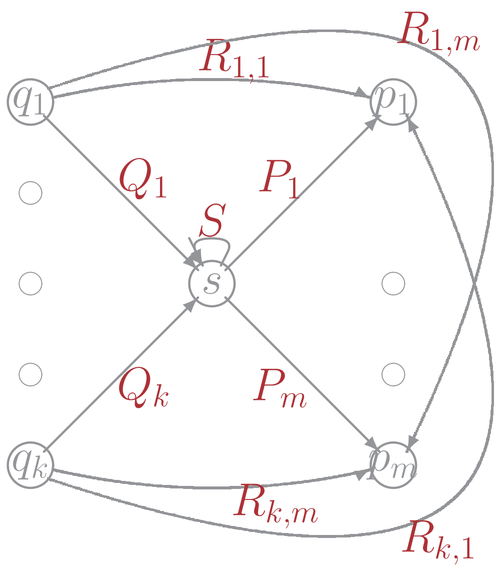


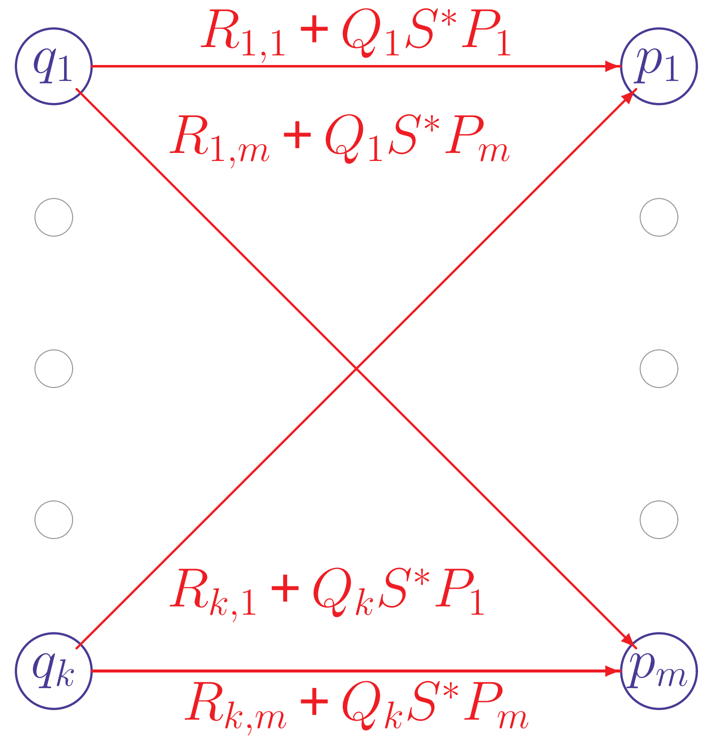
- **Nach Elimination von q_1**



  – Ausdruck für Übergang von q_0 nach q_2 ergibt sich aus Übergang q_0 nach q_1, Schleife bei q_1, Übergang q_1 nach q_2 und existierendem Ausdruck für direkten Übergang von q_0 nach q_2

Allgemeine Zustandselimination in VNEAs





Eliminiere Zustand s
mit Vorgängern $q_1, .., q_k$
und Nachfolgern $p_1, .., p_m$

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_1 über s: $R_{1,1} + Q_1 S^* P_1$

$\vdots$

– Eliminiere Pfad von q_1 nach p_m über s: $R_{1,m} + Q_1 S^* P_m$

$\vdots$

– Eliminiere Pfad von q_k nach p_1 über s: $R_{k,1} + Q_k S^* P_1$

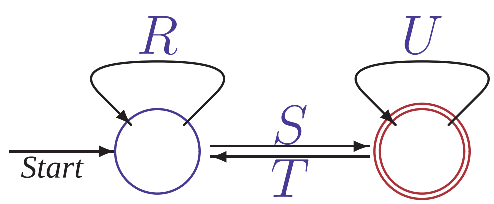
$\vdots$

– Eliminiere Pfad von q_k nach p_m über s: $R_{k,m} + Q_k S^* P_m$

Umwandlung durch Zustandselimination

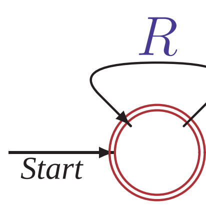
1. **Transformiere endlichen Automaten in VNEA**
   – Ersetze Beschriftungen mit Symbolen $a \in \Sigma$ durch reguläre Ausdrücke
2. **Für $q \in F$ eliminiere alle Zustände außer q_0 und q**
   – Iterative Anwendung des Eliminationsverfahrens
3. **Bilde regulären Ausdruck aus finalem Automaten**

– $q_0 \neq q$:



$$(R^* + SU^*T)^*SU^*$$

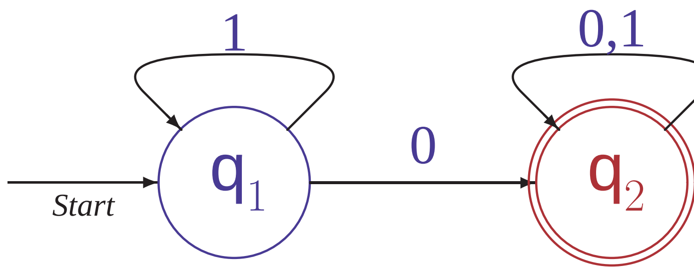
– $q_0 = q$:



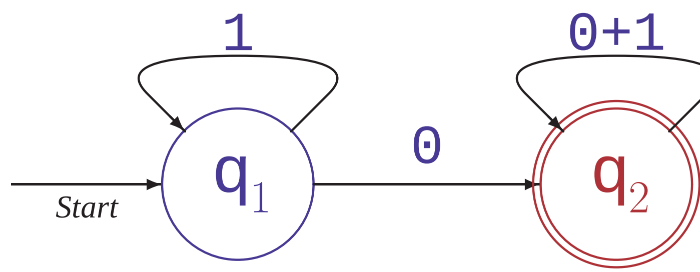
$$R^*$$

4. **Vereinige Ausdrücke aller Endzustände**
   – Bilde Summe aller entstandenen regulären Ausdrücke
   – Nicht erforderlich, wenn Automat nur einen Endzustand hat
   $\mapsto$ Ergänze neuen Anfangs/Endzustand ohne ein/ausgehende Kanten

Umwandlung durch Zustandselimination: Beispiel



- **Transformiere in VNEA**

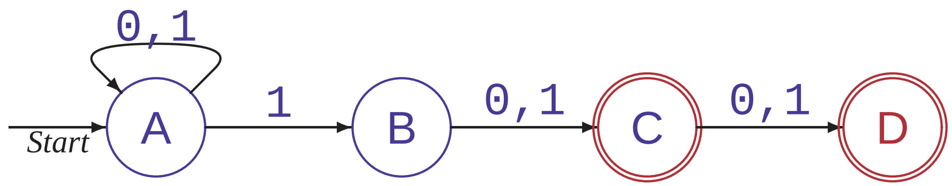


- **Keine Zustände zu eliminieren**

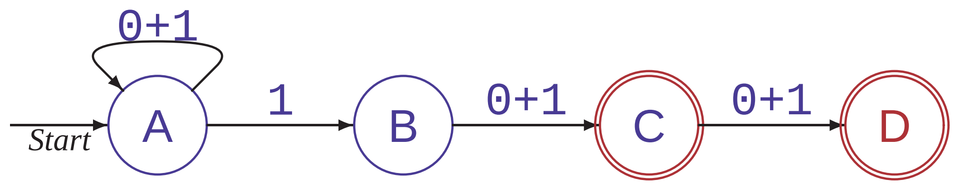
- **Bilde regulären Ausdruck aus finalem Automaten**
  - Extrahierter Ausdruck: $(1^* + 0(0+1)^*\emptyset)^*0(0+1)^*$
  - Nach Vereinfachung: $\boxed{1^*0(0+1)^*}$

Umwandlung mit Pfadanalyseverfahren würde 12 aufwendige Schritte erfordern

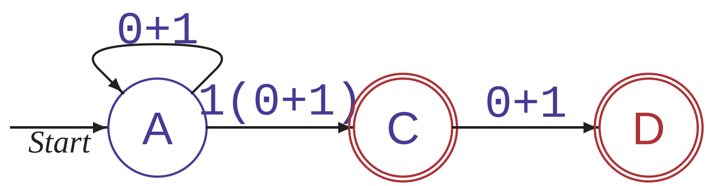
Umwandlung durch Zustandselimination II



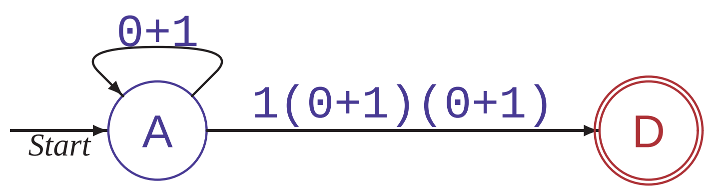
- **Transformiere in VNEA**



- **Elimination von Zustand B**

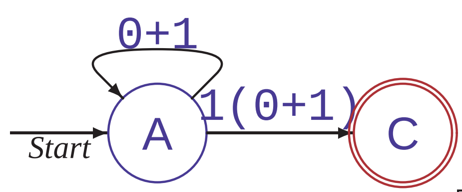


- **Elimination von Zustand C für Endzustand D**



`(0+1)*1(0+1)(0+1)`

- **Elimination von Zustand D für Endzustand C**



`(0+1)*1(0+1)`

- **Gesamter Ausdruck:** $\boxed{\texttt{(0+1)}^*\texttt{1(0+1) + (0+1)}^*\texttt{1(0+1)(0+1)}}$

Reguläre Ausdrücke – Zusammenfassung

- **Algebraische Notation für Sprachen**
  - ϵ, $\emptyset$, Symbole des Alphabets, Vereinigung, Verkettung, Sternoperator
  - Äquivalent zu endlichen Automaten
  - Gut zum Nachweis algebraischer Gesetze von Sprachen
  - Anwendung in Programmiersprachen und Suchmaschinen
- **Transformation in endliche Automaten**
  - Iterative Konstruktion von ϵ-NEAs
  - Nachträgliche Optimierung durch Elimination von ϵ-Übergängen
- **Transformation von Automaten in Ausdrücke**
  - Konstruktion durch Elimination von Zuständen in VNEAs
  - Historisch: Konstruktion von Ausdrücken für Abarbeitungspfade
  - Nachträgliche Optimierungen durch Anwendung algebraischer Gesetze

ANHANG

Originalmethode: allgemeines Graphanalyseverfahren

- **Gegeben DEA A = $(\{q_1, ..q_n\}, \Sigma, \delta, q_1, \{q_{f_1}, ..q_{f_m}\})$**
- **Definiere Ausdrücke für Pfade durch A**
  - R_{ij}^k : Regulärer Ausdruck für Menge der Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$, so dass für alle $\epsilon \neq v \sqsubseteq w$ ($v \neq w$) gilt: $\hat{\delta}(q_i, v) = q_m \Rightarrow m \leq k$ (Abarbeitung von w berührt keinen Zustand größer als k)
- **Setze die R_{ij}^k zu Ausdruck für $L(A)$ zusammen**
  - Per Definition ist R_{ij}^n ein Ausdruck für Wörter w mit $\hat{\delta}(q_i, w) = q_j$
  - Setze $R = R_{1f_1}^n + ... + R_{1f_m}^n$
  - Dann gilt $L(R) = \bigcup_{j=1}^m \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_1, w) = q_{f_j}\}$
    $= \{w \in \Sigma^* \mid \exists q \in \{q_{f_1}, .., q_{f_m}\}.\ \hat{\delta}(q_1, w) = q\} = L(A)$

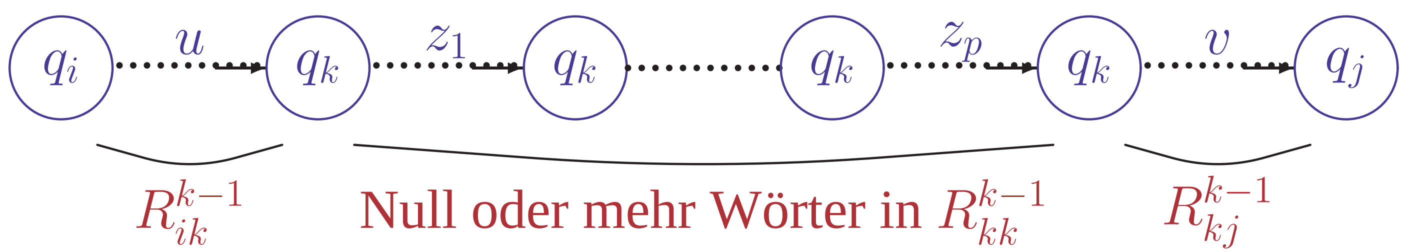
Iterative Bestimmung der Ausdrücke R_{ij}^k

- **Basisfall R_{ij}^0:** Pfad darf zwischendurch keine Zustände berühren
  - Pfadlänge 0 (nur für $i{=}j$): $\epsilon \in L(R_{ii}^0)$
  - Pfadlänge 1: $\{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\} \subseteq L(R_{ij}^0)$
  - Ergebnis: $\boldsymbol{R_{ii}^0} = \epsilon + \mathtt{a}_1 + \mathtt{..} + \mathtt{a}_k$, wobei $\{a_1, .., a_k\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) {=} q_j\}$

    $\boldsymbol{R_{ij}^0} = \emptyset + \mathtt{a}_1 + \mathtt{..} + \mathtt{a}_k$ $(i{\neq}j)$

- **Schrittfall R_{ij}^k** $(0{<}k{\leq}n)$: zwei Alternativen
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k nicht enthält, gehören zu $L(\boldsymbol{R_{ij}^{k-1}})$
  - Wörter $w \in L(R_{ij}^k)$, deren Pfad q_k enthält:

    Zerlege w in $uz_1..z_pv$ mit $\hat{\delta}(q_i, u){=}q_k \wedge \forall l{\leq}p.\hat{\delta}(q_k, z_l){=}q_k \wedge \hat{\delta}(q_k, v){=}q_j$



  - Ergebnis: $\boldsymbol{R_{ij}^k} = \boldsymbol{R_{ij}^{k-1}} + \boldsymbol{R_{ik}^{k-1}} \circ (\boldsymbol{R_{kk}^{k-1}})^* \circ \boldsymbol{R_{kj}^{k-1}}$

Umwandlung von Automaten am Beispiel

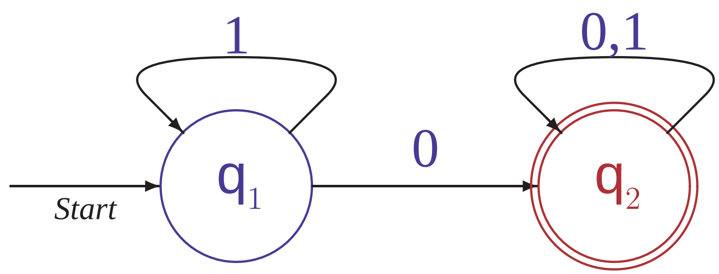
- **Basisfall**

$R^0_{11} = \epsilon + 1$

$R^0_{12} = 0$

$R^0_{21} = \emptyset$

$R^0_{22} = \epsilon + 0 + 1$



- **Stufe 1**

$R^1_{11} = R^0_{11} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \epsilon+1+(\epsilon+1)(\epsilon+1)^*(\epsilon+1) \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^1_{12} = R^0_{12} + R^0_{11}(R^0_{11})^* R^0_{12} = 0+(\epsilon+1)(\epsilon+1)^*0 \quad \mapsto \quad 1^*0$

$R^1_{21} = R^0_{21} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{11} = \emptyset+\emptyset(\epsilon+1)^*(\epsilon+1) \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^1_{22} = R^0_{22} + R^0_{21}(R^0_{11})^* R^0_{12} = \epsilon+0+1+\emptyset(\epsilon+1)^*0 \quad \mapsto \quad \epsilon+0+1$

- **Stufe 2** **Gebraucht wird nur R^2_{12}**

$R^2_{11} = R^1_{11} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{21} = 1^*+1^*0(\epsilon+0+1)^*\emptyset \quad \mapsto \quad 1^*$

$R^2_{12} = R^1_{12} + R^1_{12}(R^1_{22})^* R^1_{22} = 1^*0+1^*0(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1) \quad \mapsto \quad 1^*0(0+1)^*$

$R^2_{21} = R^1_{21} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{21} = \emptyset+(\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*\emptyset \quad \mapsto \quad \emptyset$

$R^2_{22} = R^1_{22} + R^1_{22}(R^1_{22})^* R^1_{22} = (\epsilon+0+1)+(\epsilon+0+1)(\epsilon+0+1)^*(\epsilon+0+1) \mapsto (0+1)^*$

Regulärer Ausdruck des Automaten ist: $1^*0(0+1)^*$

Das Pfadanalyseverfahren ist zu kompliziert

- **Konstruktion aller R_{ij}^k ist aufwendig**
  - Es müssen mehr als n^3 Ausdrücke R_{ij}^k erzeugt werden
  - Ausdrücke R_{ij}^k können viermal so groß wie die R_{ij}^{k-1} werden
  - Ohne Vereinfachung der R_{ij}^k sind bis zu $n^3 * 4^n$ Symbole zu erzeugen
- **Optimierungen des Verfahrens sind möglich**
  - Vermeide Vielfachkopien der R_{ij}^{k-1}
  - Vereinfache Ausdrücke R_{ij}^k direkt nach Erzeugung
  - Liefert keine grundsätzliche Verbesserung

Zustandselimination ist erheblich effizienter