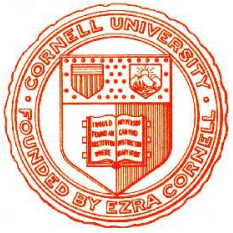
Theoretische Informatik II

Einheit 5.2



Rekursive Funktionen

1. Primitiv- und μ-rekursive Funktionen
2. Analyse und Programmierung
3. Äquivalenz zu Turingmaschinen

Berechenbarkeit ohne Maschinenmodell

Welche Arten von Funktionen sind berechenbar?

- **Einfache Funktionen müssen berechenbar sein**
  - Nachfolgerfunktion: von einer Zahl zur nächsten weiterzählen (s)
  - Projektion: aus einer Gruppe von Werten einen herauswählen (pr_k^n)
  - Konstante: unabhängig von der Eingabe eine feste Zahl ausgeben (c_k^n)
- **Berechenbare Funktionen sind zusammensetzbar**
  - Einfache Operationen erzeugen neue berechenbare Funktionen
  - Komposition: Hintereinanderausführen mehrerer Berechnungen
  - Rekursion: Bei der Ausführung ruft eine Funktion sich selbst wieder auf
  - Suche: Bestimmung der ersten Nullstelle einer Funktion
- **Beschreibung benötigt keine Funktionsargumente**
  - Es reicht, die Grundfunktionen und Operationen zu benennen
  - Programmiersprache ist abstrakt: wende Operationen auf Funktionen an

Mathematischer Kalkül für informatiktypisches 'Baukastensystem'

Beispiele für Baukastenprogrammierung

- **Addition von 2**
  - Ergebnis entsteht durch zweifache Addition von 1 $x+2 = x+1+1$
  - Abstrahiert: doppelte Anwendung der Nachfolgerfunktion $x+2 = s(s(x))$
  - Die Funktion "Addition von 2" ist also die Komposition von s und s
- **Addition zweier Zahlen x und y**
  - Ergebnis entsteht durch y-fache Addition von 1 $x+y = x+\underbrace{1+\ldots+1}_{y-mal}$
  - Iteration muß rekursiv beschrieben werden
    - Im Basisfall (y=0) ist das Ergebnis x $x+0 = x$
    - Im Schrittfall verwenden wir die Addition von x und y, um die Addition von x und y+1 zu bestimmen $x+(y+1) = (x+y)+1$
  - Abstrahiert:
    - Basisfall ergibt sich durch Anwendung der Projektion pr^1_1 auf x
    - Schrittfall ergibt sich durch Anwendung von s auf das "alte" Ergebnis
- **Subtraktion zweier Zahlen x und y**
  - Suche, von Null beginnend, die kleinste Zahl z mit $z + y = x$

Suche ist nicht wirklich erforderlich – iterierte Anwendung der Vorgängerfunktion reicht

Bausteine rekursiver Funktionen – präzisiert

- **Grundfunktionen**
  - **Nachfolgerfunktion** s :$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $s(x) = x{+}1$
  - **Projektionsfunktionen** pr^n_k :$\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ $(1{\le}k{\le}n)$ mit $pr^n_k(x_1,..,x_n) = x_k$
  - **Konstantenfunktion** c^n_k :$\mathbb{N}^n\to\mathbb{N}$ $(0{\le}n)$ mit $c^n_k(x_1,..,x_n) = k$
- **Operationen auf Funktionen**
  - **Komposition** $f{\circ}(g_1,..,g_n)$:$\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ $(g_1,..,g_n{:}\mathbb{N}^k\to\mathbb{N},\ f{:}\mathbb{N}^n\to\mathbb{N})$

    Für $h = f{\circ}(g_1,..,g_n)$ gilt $h(\vec{x}) = f(\,g_1(\vec{x}),..,g_n(\vec{x})\,)$
  - **Primitive Rekursion** $Pr[f,g]$:$\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ $(f{:}\mathbb{N}^{k-1}\to\mathbb{N},\ g{:}\mathbb{N}^{k+1}\to\mathbb{N})$

    Für $h = Pr[f,g]$ gilt $h(\vec{x},0) = f(\vec{x})$,
    und $h(\vec{x},y{+}1) = g(\vec{x},y,\,h(\vec{x},y))$

    In Programmierschreibweise: $h(\vec{x},y) =$ if $y{=}0$ then $f(\vec{x})$ else $g(\vec{x},y{-}1,h(\vec{x},y{-}1)\,)$
  - μ**-Operator (Minimierung)** μf :$\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ $(f{:}\mathbb{N}^{k+1}\to\mathbb{N})$

    Für $h{=}\mu f$ gilt $h(\vec{x}) = \begin{cases} min\{y \mid f(\vec{x},y){=}0\} & \text{falls dies existiert und alle } f(\vec{x},i) \text{ für } i{<}y \text{ definiert sind} \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$

    Notation auch: $h(x) = \mu_z[f(x,z) = 0]$

Operationen entsprechen Programmstrukturen

- **Komposition $\hat{=}$ Folge von Anweisungen**

(Berechne $h(x_1,..,x_k)$ für $h = f \circ (g_1,..,g_n)$)

```
y_1 := g_1(x_1,..,x_k);
   ⋮
y_n := g_n(x_1,..,x_k);
h   := f(y_1,..,y_n)
```

(Das Resultat h entspricht $h(x_1,..,x_k)$)

- **Primitive Rekursion $\hat{=}$ umgekehrte Zählschleife**

(Berechne $h(x_1,..,x_k,y)$ für $h = Pr[f,g]$)

```
h := f(x_1,..,x_k);
for i:=1 to y do
   h := g(x_1,..,x_k,i-1,h)
od
```

(Resultat h $\hat{=}$ $h(x_1,..,x_k,y)$)

- **Minimierung $\hat{=}$ Suche mit While-schleife**

(Berechne $h(x_1,..,x_k)$ für $h = \mu f$)

```
y := 0;
while f(x_1,..,x_k,y)≠0 do
   y:=y+1
od;
h := y
```

(unbegrenzte Suche)

(Resultat h $\hat{=}$ $h(x_1,..,x_k)$)

Analyse einer primitiven Rekursion

- $f_1 = Pr[pr^1_1, s \circ pr^3_3]$ **Was macht f_1?**
- **Stelligkeitsanalyse:**

  $pr^1_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $pr^3_3 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, $s \circ pr^3_3 : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ $\mapsto$ $f_1 : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
- **Auswertung durch schrittweises Einsetzen**

  Beispiel: $f_1(2,2) = 4$

  – Einsetzen des Definitionsschemas bei Operationen

  – Direkte Auswertung von Argumenten bei Grundfunktionen
- **Analyse des rekursiven Verhaltens:**

  – $f_1(x, 0) = pr^1_1(x) = x$

  – $f_1(x, y{+}1) = (s \circ pr^3_3)(x, y, f_1(x, y)) = s(f_1(x, y)) = f_1(x, y){+}1$

  Das ist die Rekursionsgleichung der Addition

  $$\left.\begin{array}{l} x{+}0 = x \\ x{+}(y{+}1) = (x{+}y){+}1 \end{array}\right\} \mapsto f_1 = add \text{ mit } add(n, m) = n{+}m$$

Programmierung mit primitiver Rekursion

- **Vorgängerfunktion $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$** $\qquad p(n) = n \dot{-} 1$

  Konstruiere Programm im Kalkül der rekursiven Funktionen

- **Analysiere rekursives Verhalten:**
  - $p(0) \quad = 0 \dot{-} 1 = 0$ (Subtraktion liefert niemals weniger als 0!!)
  - $p(y{+}1) = (y{+}1) \dot{-} 1 = y$

  In Programmierschreibweise: $p(y) =$ if $y{=}0$ then 0 else $y{-}1$

- **Beschreibe Verhalten als Primitive Rekursion:**
  - Die Programmiersprache "rekursive Funktionen" verlangt, daß das Beschreibungsschema $Pr[f, g]$ eingehalten wird
  - Benötigt: $f{:}\mathbb{N}^0 \to \mathbb{N}$ mit $p(0) \quad = f() = 0 \qquad \mapsto f = c_0^0$

    und $\quad g{:}\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ mit $p(y{+}1) = g(y, p(y)) = y \qquad \mapsto g = pr_1^2$

Abstraktes Programm ist $\boldsymbol{p = Pr[c_0^0, pr_1^2]}$

Primitiv- und μ-rekursive Funktionen

- **$\mathcal{PR}$: Menge der primitiv-rekursiven Funktionen**
  - Nachfolger-, Projektions- oder Konstantenfunktion sowie
  - Alle Funktionen, die aus primitiv-rekursiven Funktionen durch Komposition oder primitive Rekursion entstehen

  Primitiv-rekursive Funktionen sind total (terminieren immer)
- **$\mathcal{R}$: Menge der (μ-)rekursiven Funktionen**
  - Nachfolger-, Projektions- oder Konstantenfunktion sowie
  - Alle Funktionen, die aus μ-rekursiven Funktionen durch Komposition, primitive Rekursion oder Minimierung entstehen

  μ-rekursive Funktionen können partiell sein
- **$\mathcal{TR}$: Menge der totalen rekursiven Funktionen**

Es gilt $\mathcal{PR} \subset \mathcal{TR} \subset \mathcal{R}$

- Teilmengenbeziehung gilt offensichtlich (Beispiele für Unterschiede später)

Analyse μ-rekursiver Funktionen

- $\boldsymbol{f_2 = \mu c_1^2}$

$$f_2(x) = \begin{cases} min\{y \mid c_1^2(x,y)=0\} & \text{falls } y \text{ existiert und alle} \\ & c_1^2(x,i), i<y \text{ definiert} \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} min\{y \mid 1=0\} & \text{falls dies existiert} \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \bot$$

- $\boldsymbol{f_3 = \mu f_1}$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{f_4 = \mu h}$ mit $h(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \bot & \text{sonst} \end{cases}$$

$h(x,y) = 0$ für $x = y$, aber h ist für $x>0$ und $y<x$ nicht definiert

Entwurf primitiv-rekursiver Funktionen

- **Subtraktion** $\boldsymbol{sub}: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\qquad sub(n,m) = n \dot{-} m$
  - $sub(x,0) = x = pr^1_1(x)$
  - $sub(x,y{+}1) = x \dot{-} (y{+}1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 = p(x \dot{-} y) = (p \circ pr^3_3)(x, y, sub(x,y))$

  Abstraktes Programm: $\boldsymbol{sub = Pr[pr^1_1, p \circ pr^3_3]}$

- **Multiplikation** $\boldsymbol{mul}: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\qquad mul(n,m) = n{*}m$
  - $mul(x,0) = 0 = c^1_0(x)$
  - $mul(x,y{+}1) = mul(x,y){+}x = (add \circ (pr^3_1, pr^3_3))(x, y, mul(x,y))$

  $\boldsymbol{mul = Pr[c^1_0, (add \circ (pr^3_1, pr^3_3))]}$

- **Exponentiierung** $\boldsymbol{exp}: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\qquad exp(n,m) = n^m$

  $\boldsymbol{exp = Pr[c^1_1, (mul \circ (pr^3_1, pr^3_3))]}$

- **Fakultät** $\boldsymbol{fak}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad fak(n) = n! = 1{*}2{*}...{*}n$

  $\boldsymbol{fak = Pr[c^0_1, (mul \circ (s \circ pr^2_1, pr^2_2))]}$

- **Signum-Funktion** $\boldsymbol{sign}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad sign(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

  $\boldsymbol{sign = Pr[c^0_0, c^2_1]}$

Primitiv-rekursive Programmiertechniken

- **Definition durch Fallunterscheidung**

$$h(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & \text{falls } test(\vec{x}) = 0 \\ g(\vec{x}) & \text{sonst} \end{cases}$$

(f, g, $test$:$\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ primitiv-rekursiv)

Satz: h ist primitiv rekursiv, wenn f, g und $test$ primitiv rekursiv sind

Beweis: Wende Signum-Funktion auf Testergebnis an und multipliziere auf

$$h(\vec{x}) = (1 \dot{-} sign(test(\vec{x}))) * f(\vec{x}) + sign(test(\vec{x})) * g(\vec{x})$$

Also $h = add \circ (mul \circ (sub \circ (c_1^k, sign \circ test), f),\ mul \circ (sign \circ test, g))$

- **Generelle Summe** $\Sigma_{i=0}^{r} f(\vec{x}, i)$

  Generelles Produkt $\Pi_{i=0}^{r} f(\vec{x}, i)$ (f:$\mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ p.r.)

Es gilt $\sum_{i=0}^{0} f(\vec{x}, i) = f(\vec{x}, 0)$

und $\sum_{i=0}^{y+1} f(\vec{x}, i) = (\sum_{i=0}^{y} f(\vec{x}, i)) + f(\vec{x}, y+1)$

Also $\Sigma f = Pr[f \circ (pr_1^1, c_0^1),\ add \circ (pr_3^3, f \circ (pr_1^3, s \circ pr_2^3))]$ (für k=1)

$\Pi f = Pr[f \circ (pr_1^1, c_0^1),\ mul \circ (pr_3^3, f \circ (pr_1^3, s \circ pr_2^3))]$ (Lösung für $k>1$ analog)

Primitiv-rekursive Programmiertechniken

- **Beschränkte Minimierung $h = Mn_g[f]$**

$$h(\vec{x}) = \begin{cases} min\{y \leq g(\vec{x}) \mid f(\vec{x}, y) = 0\} & \text{falls dies existiert} \\ g(\vec{x})+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Satz: h ist primitiv rekursiv, wenn f und g primitiv rekursiv sind

Sei h' definiert durch $h'(\vec{x}, t) = \begin{cases} min\{y \leq t \mid f(\vec{x}, y) = 0\} & \text{falls dies existiert} \\ t+1 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann ist $h'(\vec{x}, 0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } f(\vec{x}, 0) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} = sign(f(\vec{x}, 0))$

und $h'(\vec{x}, t+1) = \begin{cases} h'(\vec{x}, t) & \text{falls } h'(\vec{x}, t) \leq t \\ t+1 & \text{falls } h'(\vec{x}, t) = t+1 \text{ und } f(\vec{x}, t+1) = 0 \\ t+2 & \text{sonst} \end{cases}$

Damit ist h' aus primitiv rekursiven Funktionen mit Fallunterscheidung und primitiver Rekursion konstruierbar und somit selbst primitiv rekursiv

Wegen $h(\vec{x}) = h'(\vec{x}, g(\vec{x}))$ folgt hieraus, daß auch h primitiv rekursiv ist

- **Beschränkte Maximierung $Max_g[f]$ analog**

Weitere primitiv-rekursive Funktionen

- **Absolute Differenz *absdiff*** $: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\quad absdiff(n,m) = |n-m|$
- **Maximum *max*** $: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\quad max(n,m) = \begin{cases} n & \text{falls } n \geq m \\ m & \text{sonst} \end{cases}$
- **Minimum *min*** $: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\quad min(n,m) = \begin{cases} m & \text{falls } n \geq m \\ n & \text{sonst} \end{cases}$
- **Division *div*** $: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\quad div(n,m) = n \dot{-} m$
- **Divisionsrest *mod*** $: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ $\quad mod(n,m) = n \bmod m$
- **Quadratwurzel *sqrt*** $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad sqrt(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
- **Logarithmus *ld*** $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad ld(n) = \lfloor \log_2 n \rfloor$
- **Größter gemeinsamer Teiler *ggT*** $: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$
- **Kleinstes gemeinsames Vielfaches *kgV*** $: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$

Beweise in Übungen selbst durchführen !

Berechnungen auf Zahlenpaaren und -listen

y/x	0	1	2	3	4	5	...
5	20						...
4	14	19					...
3	9	13	18				...
2	5	8	12	17			...
1	2	4	7	11	16		...
0	0	1	3	6	10	15	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	...

$$\langle x,y\rangle := (\Sigma_{i=1}^{x+y} i) + y$$
$$=$$
$$(x+y)(x+y+1)\div 2 + y$$

"Standard-Tupelfunktion"

- $\langle\rangle:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ **ist primitiv-rekursiv und bijektiv**
- **Die Umkehrfunktionen** $\pi_i^2 := pr_i^2\circ\langle\rangle^{-1}$ **sind primitiv-rekursiv**
- $\langle\rangle$ **kann iterativ auf** $\mathbb{N}^k\to\mathbb{N}$ **und auf** $\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}$ **fortgesetzt werden**
  - $\langle x,y,z\rangle^3 = \langle x,\langle y,z\rangle\rangle, \ldots, \quad \langle x_1 ... x_k\rangle^* = \langle k,\langle x_1,..,x_k\rangle^k\rangle$
  - Alle Funktionen sind bijektiv und primitiv-rekursiv
  - Alle Umkehrfunktionen π_i^k und π_i^* sind primitiv-rekursiv
- **Jede rekursive Funktion kann einstellig simuliert werden**
  - Für $f:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ und $g:=f\circ(\pi_1^2,\pi_2^2)$ gilt $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ und $g\langle x,y\rangle = f(x,y)$

Die Ackermann-Funktion (1928)

Gibt es berechenbare totale Funktionen, die nicht p.r. sind?

- **Definiere Funktionen A_n iterativ:**

$$A_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = 0 \\ 2 & \text{falls } x = 1 \\ x{+}2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$A_{n+1}(0) := 1$$
$$A_{n+1}(x{+}1) := A_n(A_{n+1}(x))$$

Jede der Funktionen A_n ist (einzeln) primitiv-rekursiv

- **Wachstumsverhalten**

$A_1(x) = 2x \ (x{\geq}1)$

$A_2(x) = 2^x$

$A_3(x) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\cdots^2})})}}_{x-mal}$

$A_4(0) = 1$

$A_4(1) = 2$

$A_4(2) = 2^2 = 4$

$A_4(3) = 2^{2^{2^2}} = 65536$

$A_4(4) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\cdots^2})})}}_{65536-mal}$

$A_4(5) = \underbrace{2^{(2^{(2^{\cdots^2})})}}_{A_4(4)-mal}$

- **Definiere $A(x) := A_x(x)$** (Große Ackermann-Funktion)

A ist nicht primitiv-rekursiv aber μ-rekursiv und total

Warum kann A nicht primitiv-rekursiv sein ?

- **Betrachte Schachtelungstiefe einer Funktion**

  Anzahl der ineinander verschachtelten For-Schleifen

  – Funktionen ohne Minimierung und primitive Rekursion $\mapsto$ Tiefe 0

  – Komposition mit Funktionen der Tiefe n $\mapsto$ Tiefe n

  – Primitive Rekursion mit Funktionen der Tiefe n $\mapsto$ Tiefe $n+1$

  Primitiv-rekursive Funktionen haben eine begrenzte Schachtelungstiefe

- **Beispiele**

  – Tiefe 1: Addition add, Vorgänger p, Signum $sign$

  – Tiefe 2: Multiplikation mul, Subtraktion sub

  – Tiefe 3: Exponentiation exp, Fakultät fak

- **Die Schachtelungstiefe von A ist unbegrenzbar**

  – Die Berechnung von $A(x)$ benötigt Schachtelungstiefe x

  – **A kann nicht primitiv-rekursiv sein**

  Präzises formales Argument ist sehr aufwendig (mögliches Projektthema)

Warum ist die Ackermannfunktion berechenbar?

- **Intuitiver Berechnungsmechanismus einfach**
  - Schrittweise Abarbeitung der Rekursion
  - Abarbeitung des Rekursionsstacks ist 'programmierbar'
- ***A* ist total und μ-rekursiv** (mögliches Projektthema)
  - Beschreibe Abarbeitungsfunktion δ eines Berechnungsstacks für A unter Verwendung der Standardtupelfunktion auf Worten über $\mathbb{N}$

    $\delta\langle wx0\rangle^* = w1$

    $\delta\langle w01\rangle^* = w2$

    $\delta\langle w0(y{+}2)\rangle^* = w(y{+}4)$

    $\delta\langle w(x{+}1)(y{+}1)\rangle^* = \langle wx(x{+}1)y\rangle^*$
  - δ ist primitiv-rekursiv (Beschreibung des Programms aufwendig)
  - Berechne $A(x) = \delta^k\langle xx\rangle^*$, wobei $k = \mu_j\,[\pi_1^2(\delta^j\langle xx\rangle^*) = 1]$
  - Berechnung terminiert, da in jedem δ-Schritt entweder die erste bearbeitete Zahl im Stack oder die Anzahl der Zahlen kleiner wird

Ausdruckskraft rekursiver Funktionen

- **$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$:** rekursive Funktionen sind Turing-berechenbar
  - Alle Grundfunktionen sind konventionell berechenbar
  - Komposition, Primitive Rekursion und μ-Operator sind berechenbar
  - Konventionell berechenbare Funktionen sind Turing-berechenbar
- **$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}$:** Turing-berechenbare Funktionen sind rekursiv
  - Codiere Konfigurationen (Worttupel) als Zahlentupel
  - Simuliere Konfigurationsübergänge $\vdash$ als primitiv-rekursive Funktionen
  - Beschreibe Terminierung von $\vdash^*$ als Suche nach Endkonfiguration
  - Semantik der Turingmaschine ist Iteration von $\vdash$ bis Terminierung
- **$\mathcal{PR}$ und $\mathcal{TR}$ sind echte Unterklassen von $\mathcal{R}$**
  - $\mathcal{PR} \subseteq \mathcal{TR} \subseteq \mathcal{R}$ gilt offensichtlich
  - $\mathcal{TR} \neq \mathcal{R}$: nicht alle rekursiven Funktionen sind total (z.B. $f_3 = \mu\, add$)
  - $\mathcal{PR} \neq \mathcal{TR}$: die Ackermannfunktion ist total, aber nicht primitiv rekursiv

Konsequenzen der Äquivalenzbeweise

- **Für formale Argumente zur Berechenbarkeit können wahlweise Turingmaschinen oder μ-rekursive Funktionen eingesetzt werden**
- **Kleene Normalform Theorem:**

  Für jede berechenbare Funktion h kann man primitiv-rekursive Funktionen f und g konstruieren, so daß

  $$h(x) = g(x, \mu f(x))$$

  – Simuliere Turingmaschine für h als μ-rekursive Funktion
  – f ist die Funktion, die Terminierung charakterisiert
  – μf berechnet die Anzahl der Schritte bis zur Terminierung
  – g berechnet die Iteration der Konfigurationsübergänge

- **Berechenbare Funktionen kommen mit einer einzigen Minimierung (While-Schleife) aus**

Rekursive Funktionen im Rückblick

- **Axiomatische Definition von Berechenbarkeit**
  - Abstrakter Funktionenkalkül ohne direkte Benennung der Argumente
  - Bausteine: Grundfunktionen s, pr^n_k, c^n_k und Operatoren $\circ$, Pr, μ
  - Rekursive Funktionen sind Turing-mächtig
- **Minimierung ist der mächtigste Mechanismus**
  - Oft einfacher und eleganter als Anwendung der primitiven Rekursion
  - Terminierung im Allgemeinfall jedoch nicht gesichert
  - Theoretisch braucht jede rekursive Funktion maximal eine Minimierung
- **Primitiv-rekursive Funktionen als Unterklasse**
  - Abstraktes Programm darf keine Minimierung enthalten
  - Fast alle wichtigen Funktionen sind primitiv-rekursiv
  - Fast alle Programmiertechniken erhalten primitive Rekursivität
  - Es gibt totale berechenbare Funktionen, die nicht primitiv-rekursiv sind

Mehr Details in Lewis & Papadimitriou §4.7 und den auf der Webseite genannten Skripten